

# PARTE 2

# INTERACCIONES

# Y CAMPOS

*A. Gravitación*

Una vez de haber comprendido las reglas generales que gobiernan el movimiento, la próxima etapa es investigar las interacciones responsables de tales movimientos. Una de ellas es la *interacción gravitatoria*, que se manifiesta en el movimiento planetario y en el movimiento de la materia en conjunto. La gravitación, a pesar del hecho de que es la más débil de todas las interacciones conocidas, es la primera interacción cuidadosamente estudiada, debido al natural interés del hombre en la astronomía y a que la gravitación es responsable de muchos fenómenos que afectan directamente nuestras vidas. Otra interacción es la *interacción electromagnética*, que es la mejor comprendida y quizás la de mayor importancia desde el punto de vista de la vida cotidiana. La mayoría de los fenómenos que observamos alrededor nuestro, incluyendo los procesos químicos y biológicos, son el resultado de interacciones electromagnéticas entre átomos y moléculas. Una tercera clase la constituyen la *interacción nuclear o fuerte*, la cual es responsable de la unión de los protones y neutrones (conocidos como nucleones) dentro del núcleo atómico, y otros fenómenos conexos. A pesar de la intensa investigación nuestro conocimiento de esta interacción es aún incompleto. Una cuarta clase es la *interacción débil*, responsable de ciertos procesos entre las partículas fundamentales, tales como la desintegración beta. Nuestra comprensión de esta interacción es aún muy pobre. Las intensidades relativas de estas interacciones son: fuerte considerada como unidad; electromagnética  $\sim 10^{-2}$ ; débil  $\sim 10^{-5}$ ; gravitatoria  $\sim 10^{-38}$ . Uno de los problemas no resueltos todavía en la física es el porqué de tan sólo cuatro interacciones, y la razón de tan gran diferencia en sus intensidades.

Es interesante recordar lo que dijo Newton, hace 200 años, con respecto a las interacciones:

¿No tienen las pequeñas Partículas de los Cuerpos ciertos Poderes o Fuerzas, por medio de los cuales actúan... entre ellas para producir una gran Parte de los Fenómenos de la Naturaleza? Porque es bien conocido, que los Cuerpos actúan unos sobre otros por las Atracciones de la Gravedad, el Magnetismo y la Electricidad;... y no es improbable que haya más Poderes atractivos que éstos... No considero aquí cómo se realizan estas atracciones... Las Atracciones de la Gravedad, el Magnetismo, y la Electricidad alcanzan distancias muy considerables,... y puede haber otras que alcancen sólo distancias tan pequeñas que escapen a la observación;... (*Opticks*, Libro III, Query 31).

Para describir estas interacciones, introducimos el concepto de *campo*. Por *campo* entendemos una propiedad física que se extiende sobre una región del espacio y se describe por una función de la posición y el tiempo. Para cada interacción suponemos que una partícula produce alrededor de ella el campo correspondiente. Este campo a su vez actúa sobre una segunda partícula para producir la interacción requerida. La segunda partícula produce su propio campo, el cual actúa sobre la primera partícula, dando lugar a una interacción mutua.

Aunque las interacciones pueden describirse por medio de campos, todos los campos no corresponden necesariamente a interacciones, un hecho implícito en la definición de campo. Por ejemplo, un meteorólogo puede expresar la presión atmosférica y la temperatura como una función de la latitud y la longitud de la superficie y la altura sobre la tierra. Tenemos entonces dos campos escalares:

el campo de presión y el campo de temperaturas. En un fluido en movimiento, la velocidad del fluido en cada punto constituye un campo vectorial. El concepto de campo tiene así una utilidad grande y general en física.

En el capítulo 13 discutiremos la interacción gravitatoria y su campo. En los capítulos 14 al 17 (que aparecen en el volumen II), consideraremos las interacciones electromagnéticas. Trataremos las otras interacciones en el volumen III.

# INTERACCION GRAVITACIONAL

- 13.1 *Introducción*
- 13.2 *La ley de gravitación*
- 13.3 *La masa inercial y gravitacional*
- 13.4 *La energía potencial gravitacional*
- 13.5 *El movimiento general bajo la interacción gravitacional*
- 13.6 *El campo gravitacional*
- 13.7 *El campo gravitacional debido a un cuerpo esférico*
- 13.8 *El principio de equivalencia*
- 13.9 *La gravitación y las fuerzas intermoleculares*

### 13.1 Introducción

Uno de los problemas fundamentales que ha intrigado al hombre desde los albores de la civilización ha sido el movimiento de los cuerpos celestes o, como decimos hoy día, el movimiento planetario. Quizá uno de los procesos más interesantes en la historia de la ciencia ha sido la evolución de nuestra comprensión del movimiento planetario.

Los griegos, que consideraban al hombre como el centro del universo, supusieron que la tierra era el centro geométrico del universo y que los cuerpos celestes se movían alrededor de la tierra. Los cuerpos conocidos en aquel tiempo fueron ordenados de acuerdo con la distancia promedio a la tierra: la luna, Mercurio, Venus, el sol, Marte, Júpiter y Saturno.

La primera hipótesis relacionada con el movimiento planetario consistió en suponer que los planetas describían círculos concéntricos, teniendo a la tierra en su centro. Esta suposición, sin embargo, no explicaba el movimiento observado de estos cuerpos con respecto a la tierra, y la geometría del movimiento planetario se hizo más y más compleja. En el siglo segundo de la era cristiana, el astrónomo Ptolomeo de Alejandría desarrolló la teoría de las epicicloides para explicar este movimiento. En forma sencilla se suponía que el planeta describía, con movimiento uniforme, un círculo denominado un *epiciclo*, cuyo centro a su vez, se desplazaba en un círculo mayor, concéntrico con la tierra y llamado *deferente*. La trayectoria resultante del planeta es así una *epicicloide* (Fig. 13-1). En algunos casos era necesario una disposición más complicada para describir los movimientos planetarios. En nuestro lenguaje actual, lo que hicieron los griegos fue describir el movimiento planetario con respecto a un sistema de referencia situado en la tierra.

Esta descripción fue aceptada como correcta hasta que, en el siglo dieciséis, el monje polaco Nicolás Copérnico (1473-1543), que buscaba una solución más simple, propuso describir el movimiento de todos los planetas, incluyendo la tierra, con respecto al sol, el cual estaría en el centro. La idea no era nueva; había sido propuesta por primera vez por el astrónomo griego Aristarco alrededor del siglo tercero antes de Cristo. De acuerdo a Copérnico, el orden de las órbitas de los planetas con respecto al sol era el siguiente: Mercurio, Venus, La

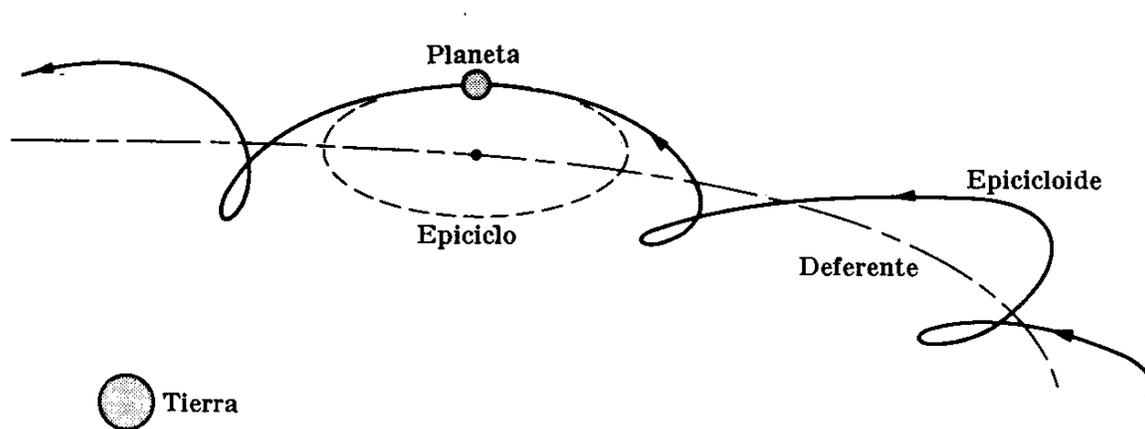


Fig. 13-1. Modelo epicicloidal del movimiento planetario referido a la tierra.

tierra, Marte, Júpiter y Saturno, la luna girando alrededor de la tierra. Lo que Copérnico propuso esencialmente fue otro sistema de referencia situado en el sol, respecto al cual el movimiento de los planetas tenía una descripción más sencilla.

**TABLA 13-1 Datos básicos del Sistema Solar \***

Cuerpo	Distancia media, $m$	Masa kg	Período de rotación, s	Radio medio de la órbita, $m$	Período del mov. orb. s	Excentricidad de la órbita
El sol	$6,96 \times 10^8$	$1,98 \times 10^{30}$	$2,3 \times 10^6$	—	—	—
Mercurio	$2,34 \times 10^6$	$3,28 \times 10^{23}$	$5,03 \times 10^6$	$5,79 \times 10^{10}$	$7,60 \times 10^6$	0,206
Venus	$6,26 \times 10^6$	$4,83 \times 10^{24}$	(?)	$1,08 \times 10^{11}$	$1,94 \times 10^7$	0,007
La tierra	$6,37 \times 10^6$	$5,98 \times 10^{24}$	$8,62 \times 10^4$	$1,49 \times 10^{11}$	$3,16 \times 10^7$	0,017
Marte	$3,32 \times 10^6$	$6,40 \times 10^{23}$	$8,86 \times 10^4$	$2,28 \times 10^{11}$	$5,94 \times 10^7$	0,093
Júpiter	$6,98 \times 10^7$	$1,90 \times 10^{27}$	$3,54 \times 10^4$	$7,78 \times 10^{11}$	$3,74 \times 10^8$	0,049
Saturno	$5,82 \times 10^7$	$5,68 \times 10^{26}$	$3,61 \times 10^4$	$1,43 \times 10^{12}$	$9,30 \times 10^8$	0,051
Urano	$2,37 \times 10^7$	$8,67 \times 10^{25}$	$3,85 \times 10^4$	$2,87 \times 10^{12}$	$2,66 \times 10^9$	0,046
Neptuno	$2,24 \times 10^7$	$1,05 \times 10^{26}$	$5,69 \times 10^4$	$4,50 \times 10^{12}$	$5,20 \times 10^9$	0,004
Pluto	$(3,00 \times 10^6)$	$(5,37 \times 10^{24})$	(?)	$5,91 \times 10^{12}$	$7,82 \times 10^9$	0,250
La luna	$1,74 \times 10^6$	$7,34 \times 10^{22}$	$2,36 \times 10^6$	$3,84 \times 10^8$	$2,36 \times 10^6$	0,055

\* Las cantidades entre paréntesis son dudosas. Los datos orbitales de la luna se dan con respecto a la tierra.

El sol, el cuerpo más grande de nuestro sistema planetario, coincide prácticamente con el centro de masa del sistema, y se mueve más lentamente que los otros planetas. Esto justifica el haberlo escogido como centro de referencia, ya que es, prácticamente, un sistema inercial. Lo propuesto por Copérnico ayudó al astrónomo Johannes Kepler (1571-1630) en el descubrimiento de las leyes del movimiento planetario, como resultado del análisis cuidadoso de las mediciones astronómicas de Tycho Brahe (1546-1601). Estas leyes, denominadas *leyes de Kepler*, son una descripción cinemática del movimiento planetario y se enuncian de la siguiente manera:

- I. *Los planetas describen órbitas elípticas, estando el sol en uno de sus focos.*
- II. *El vector posición de cualquier planeta con respecto al sol barre áreas iguales de la elipse en tiempos iguales. (Esta proposición se denomina la ley de las áreas).*
- III. *Los cuadrados de los períodos de revolución son proporcionales a los cubos de las distancias promedio de los planetas al sol. (Esta ley puede expresarse por la ecuación  $P^2 = kr^3$ , siendo  $k$  una constante de proporcionalidad).*

La siguiente etapa en la historia de la astronomía fue una discusión de la dinámica del movimiento planetario y un esfuerzo por determinar la interacción responsable de tal movimiento. Es aquí donde Sir Isaac Newton (1642-1727) llevó a cabo su grandiosa contribución, *la ley de gravitación universal*. Esta ley

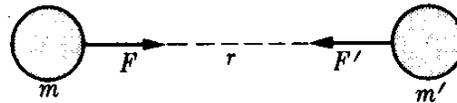
(que se discutirá más adelante en este capítulo), formulada por Newton en 1666, sólo fue publicada en 1687, cuando apareció como un capítulo en su monumental trabajo *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.

Los datos más importantes del sistema solar han sido recolectados en la tabla 13-1.

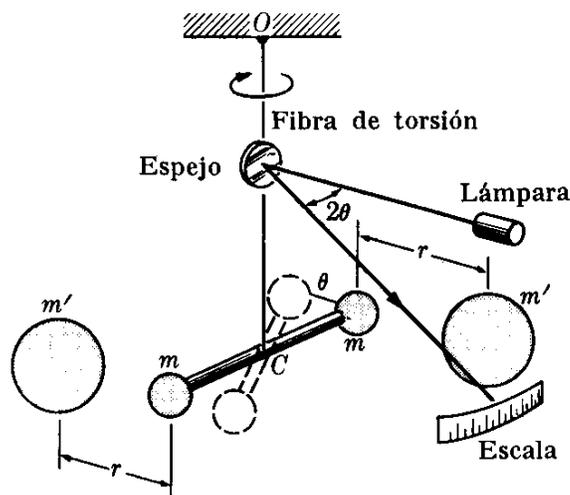
### 13.2 La ley de gravitación

Después de su proposición de las leyes del movimiento (capítulo 7), la segunda contribución de Newton, y quizás la más grande al desarrollo de la mecánica fue el descubrimiento de la ley de interacción gravitacional; esto es, la interacción entre dos cuerpos, ya sean planetas o partículas pequeñas, que produce un movimiento que puede ser descrito por las leyes de Kepler.

**Fig. 13-2.** Interacción gravitacional entre dos masas.



En primer lugar, de acuerdo a la sección 7.14, la ley de las áreas (o segunda ley de Kepler), indica que *la fuerza asociada con la interacción gravitacional es central*. Esto es, la fuerza actúa a lo largo de la línea que une los dos cuerpos interactuantes (Fig. 13-2), en este caso un planeta y el Sol. Segundo, si suponemos que la interacción gravitatoria es una propiedad *universal* de toda materia, la fuerza  $F$  asociada con la interacción debe ser proporcional a la “cantidad” de materia de cada cuerpo; esto es, a sus masas respectivas  $m$  y  $m'$ . Luego podemos escribir  $F = mm'f(r)$ .



**Fig. 13-3.** Balanza de torsión de Cavendish. Cuando las masas  $m'$  se colocan cerca de las masas  $m$ , su atracción gravitatoria produce un torque en la barra horizontal que da lugar a la torsión de la fibra  $OC$ . El equilibrio se establece cuando los torques gravitatorio y torsional se igualan. El torque torsional es proporcional al ángulo  $\theta$ , que se mide por la deflexión de un rayo reflejado en un espejo situado en la fibra. Repitiendo el experimento a varias distancias  $r$ , y usando diferentes masas  $m$  y  $m'$ , podemos verificar la ley (13.1).

Determinar la dependencia entre la fuerza  $F$  y la distancia  $r$ , es un problema más difícil. Podemos determinar esta dependencia experimentalmente midiendo la fuerza entre las masas  $m$  y  $m'$  para varias separaciones y deduciendo de nuestras observaciones la relación entre  $F$  y  $r$ . Este procedimiento que ha sido realizado, requiere un equipo experimental muy sensible debido a que la interacción es extremadamente débil y la fuerza gravitacional es muy pequeña a menos que las masas sean muy grandes (tales como la de dos planetas), o la distancia  $r$  sea muy pequeña. Pero en este segundo caso, como veremos más tarde, otras interacciones más fuertes que la gravitacional entran en juego e impiden observar los efectos gravitatorios. El resultado de estos experimentos nos permite llegar a la conclusión que *la interacción gravitacional es atractiva y varía inversamente con el cuadrado de la distancia entre los dos cuerpos; esto es  $f(r) \propto 1/r^2$ .*

Por consiguiente la expresión de la fuerza de gravitación es

$$F = \gamma \frac{mm'}{r^2}, \quad (13.1)$$

donde la constante de proporcionalidad  $\gamma$  depende de las unidades utilizadas para las otras cantidades. Por ello  $\gamma$  debe determinarse experimentalmente midiendo la fuerza  $F$  entre dos masas conocidas  $m$  y  $m'$  a una distancia conocida  $r$ . El valor de  $\gamma$  en unidades MKSC es

$$\gamma = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \quad (\text{ó } \text{m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}).$$

Podemos entonces establecer *la ley universal de gravitación de Newton* diciendo que

*la interacción gravitacional entre dos cuerpos puede expresarse por una fuerza de atracción central proporcional a las masas de los cuerpos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.*

Al discutir la ec. (13.1) hemos sugerido que la interacción gravitacional entre dos masas puede derivarse de los experimentos, pero ello no implica que la interacción gravitatoria sea la fuerza responsable del movimiento planetario de acuerdo a las leyes de Kepler. En efecto, Newton no procedió en la manera en que nosotros lo hemos hecho, sino en sentido inverso. Usando las leyes de Kepler, derivó la ec. (13.1) para la fuerza entre dos planetas y luego generalizó este resultado para aplicarlo a dos masas cualesquiera. Presentaremos ahora una discusión simplificada del método de Newton, posponiendo un análisis más general hasta la sección 13.5.

La primera ley de Kepler establece que la órbita de un planeta es una elipse. Un caso particular de una elipse es un círculo, en el cual los dos focos coinciden con el centro. En este caso, de acuerdo a la segunda ley, la fuerza  $F$  se dirige hacia el centro del círculo. Por ello, usando la ec. (7.28) para la fuerza centrípeta en el movimiento circular y refiriendo el movimiento de  $m$  a un sistema de referencia situado en  $m'$  (Fig. 13-4), podemos expresar la fuerza como

$$F = \frac{mv^2}{r}.$$

Estrictamente hablando, deberíamos usar en lugar de  $m$ , la masa reducida del sistema compuesto de  $m$  y  $m'$ , de acuerdo a la ec. (9.15), pero nuestra simplificación no afecta nuestras conclusiones. Recordando que  $v = 2\pi r/P$ , tenemos

$$F = \frac{4\pi^2 m r}{P^2}.$$

Pero la tercera ley de Kepler, en el caso especial de una órbita circular cuando la distancia promedio entre  $m$  y  $m'$  es el radio del círculo, es  $P^2 = kr^3$ . Luego

$$F = \frac{4\pi^2 m}{kr^2},$$

que demuestra que para satisfacer las leyes de Kepler la interacción gravitacional debe ser central e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

Newton mismo verificó la veracidad de su hipótesis comparando la aceleración centripeta de la luna con la aceleración de la gravedad  $g = 9,80 \text{ m s}^{-2}$ . La aceleración centripeta de la luna es  $a_c = v^2/r = 4\pi^2 r/P^2$ , con  $r = 3,84 \times 10^8 \text{ m}$  y  $P = 2,36 \times 10^6 \text{ s}$ . Así  $a_c = 2,72 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$ . Por consiguiente

$$g/a_c = 3602 \approx (60)^2.$$

Pero, como el radio de la tierra es de  $R = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$ , tenemos que

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2 = \left(\frac{384}{6.37}\right)^2 \approx (60)^2.$$

Por consiguiente  $g/a_c = (r/R)^2$  y, dentro de la exactitud de nuestro cálculo aproximado, las dos aceleraciones están en proporción inversa del cuadrado de las distancias de los puntos desde el centro de la tierra.

**EJEMPLO 13.1.** Relacionar la aceleración de la gravedad con la masa de la tierra. Usando la respuesta, estimar la masa de la tierra.

**Solución:** Consideremos una partícula de masa  $m$  sobre la superficie terrestre. Su distancia al centro de la tierra es igual al radio de la tierra  $R$ . Luego, si denotamos la masa de la tierra por  $M$ , la expresión (13.1) nos da la fuerza sobre el cuerpo,

$$F = \gamma m M / R^2.$$

Esta fuerza fue definida en la ec. (7.16) como el *peso* del cuerpo, y por consiguiente debemos igualarla a  $mg$ , donde  $g$  es la aceleración de la gravedad. Luego

$$mg = \gamma m M / R^2$$

o, cancelando el factor común  $m$ , tenemos

$$g = \gamma M / R^2.$$

Este resultado da la aceleración de la gravedad en función de la masa y el radio

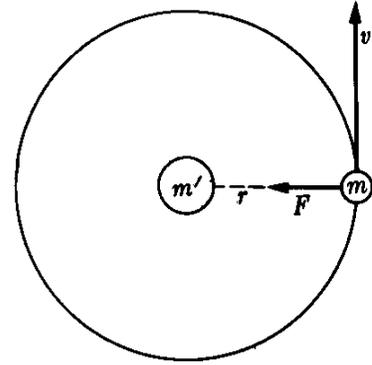


Fig. 13-4. Movimiento de la partícula  $m$  bajo su interacción gravitacional con  $m'$ .

de la tierra. Notar que la masa del cuerpo no aparece en esta expresión, y por ello (si despreciamos la resistencia del aire) todos los cuerpos caen con la misma aceleración, de acuerdo con nuestras observaciones.

Despejando la masa  $M$  de la tierra, obtenemos

$$M = gR^2/\gamma.$$

Introduciendo los valores numéricos apropiados  $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$ ,  $R = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$ , y  $\gamma = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ , obtenemos  $M = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$ .

El estudiante debe notar que en este ejemplo hemos usado la distancia de la masa  $m$  al centro de la tierra. En otras palabras, hemos supuesto implícitamente que la fuerza sobre  $m$  es la misma como si toda la masa de la tierra estuviera concentrada en su centro, una suposición que se justificará en la sección 13.7.

**EJEMPLO 13.2.** Calcular la masa de un planeta que tiene un satélite.

**Solución:** Supongamos que un satélite de masa  $m$  describe, con un período  $P$ , una órbita circular de radio  $r$  alrededor de un planeta de masa  $M$ . La fuerza de atracción entre el planeta y el satélite es

$$F = \gamma m M / r^2.$$

Esta fuerza debe ser igual a  $m$  veces la aceleración centrípeta  $v^2/r = 4\pi^2 r / P^2$ . Por consiguiente

$$\frac{4\pi^2 m r}{P^2} = \frac{\gamma m M}{r^2}.$$

Cancelando el factor común  $m$  y despejando  $M$ , obtenemos

$$M = 4\pi^2 r^3 / \gamma P^2.$$

Sugerimos que el estudiante utilice esta expresión para reevaluar la masa de la tierra, usando los datos de la luna ( $r = 3,84 \times 10^8 \text{ m}$  y  $P = 2,36 \times 10^6 \text{ s}$ ). La concordancia con el resultado del ejemplo 13.1 es una prueba de la consistencia de la teoría. Esta fórmula puede también ser utilizada para obtener la masa del sol, usando los datos de los diferentes planetas.

### 13.3 La masa inercial y gravitacional

En el capítulo 7 introdujimos el concepto de masa en relación con las leyes del movimiento. Por dicha razón la denominamos *masa inercial*. También hemos supuesto que las leyes del movimiento son de validez universal y son por lo tanto las mismas para toda clase de materia, ya sean electrones, protones, neutrones, o grupos de estas partículas. Por otro lado, en este capítulo hemos estado discutiendo una interacción particular llamada gravitación. Para caracterizar su intensidad, debemos dar a cada porción de materia una *carga gravitacional* o *masa gravitacional*  $m_g$ . Debíamos haber escrito entonces la ec. (13.1) en la forma

$$F = \gamma m_g m'_g / r^2.$$

Sin embargo, si suponemos que la gravitación es una propiedad universal de toda clase de materia, podemos considerar que la masa gravitatoria es propor-

cional a la masa inercial, y por consiguiente la relación

$$K = \frac{\text{masa gravitacional, } m_g}{\text{masa inercial, } m}$$

debe ser la misma para todos los cuerpos. Escogiendo apropiadamente las unidades de  $m_g$ , podemos hacer que esta relación valga uno y entonces usar el mismo número tanto para la masa gravitatoria como para la masa inercial. Esto se ha hecho implícitamente en la selección del valor de la constante  $\gamma$ . La constancia de  $K$ , que es equivalente a la constancia de  $\gamma$ , ha sido verificada experimentalmente para toda clase de cuerpos con gran cuidado, y puede considerarse como una hipótesis correcta. El hecho bien demostrado de que todos los cuerpos cerca de la superficie terrestre caen con la misma aceleración es una indicación del hecho de que la masa inercial y la masa gravitatoria son lo mismo, ya que, bajo dicha suposición, la aceleración de la gravedad es  $g = \gamma M/R^2$ , como se discutió en el ejemplo 13.1, y  $g$  es independiente de la masa del cuerpo que cae. Por consiguiente, en adelante usaremos el término "masa" para referirnos ya sea a la masa inercial o a la gravitatoria, puesto que no se pueden distinguir.

De la ec. (13.1) podemos definir la unidad de masa como la masa que, cuando se le coloca a la unidad de distancia de una masa igual, la atrae con una fuerza igual a  $\gamma$  unidades. Escogiendo apropiadamente el valor de  $\gamma$  podemos definir una unidad de masa. Sin embargo, el escoger arbitrariamente  $\gamma$  puede alterar la estructura de las ecuaciones de la mecánica. Otros inconvenientes con este procedimiento de definición de la masa unitaria es que requiere previamente la definición de fuerza. Por ello este procedimiento no es utilizado. En su lugar, como indicamos previamente, seguiremos el método inverso, y, después de haber escogido las unidades de masa y fuerza, determinamos experimentalmente el valor de  $\gamma$ .

Una manera de medir o comparar las masas de dos cuerpos es utilizar un tercer cuerpo como referencia. Consideremos dos masas  $m$  y  $m'$  situadas a la misma distancia  $r$  de una tercera masa de referencia  $M$  (Fig. 13-5). Luego, de acuerdo con la ec. (13.1), las fuerzas sobre  $m$  y  $m'$  son

$$F = \frac{\gamma M m}{r^2}, \quad F' = \frac{\gamma M m'}{r^2}.$$

La relación entre estas dos fuerzas es  $F/F' = m/m'$ . Por consiguiente, si tenemos un método para comparar fuerzas sin necesidad de medir cada una de ellas, la relación precedente proporciona un método para comparar y medir masas. El principio de la balanza permite que usemos este método cuando el cuerpo de referencia es la tierra. La balanza se encuentra en equilibrio cuando las dos fuerzas son iguales, y por consiguiente las masas son iguales. Hemos justificado así el método indicado en la sección 2.3 para medir la masa mediante una balanza.

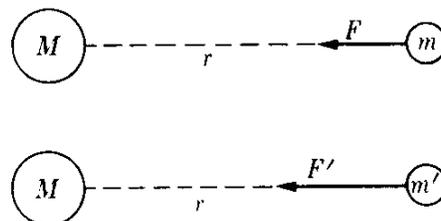


Fig. 13-5. Método de comparación de dos masas  $m$  y  $m'$  mediante su interacción gravitacional con una tercera masa  $M$ .

### 13.4 La energía potencial gravitacional

Debido a que la interacción gravitacional dada por la ec. (13.1) es central y depende solamente de la distancia, corresponde a una fuerza conservativa. Podemos por consiguiente asociar con ella una *energía potencial gravitacional*. Suponiendo que el origen de coordenadas se encuentre en  $m'$  y considerando solamente la fuerza que actúa sobre  $m$ , notamos que  $\mathbf{F}$ , siendo una fuerza de atracción, tiene dirección opuesta al vector  $\mathbf{r} = \overline{OA} = r\mathbf{u}_r$ , donde  $\mathbf{u}_r$  es el vector unitario en la dirección  $\overline{OA}$  y, por consiguiente, en lugar de la ec. (13.1), debemos escribir con más propiedad la ecuación vectorial

$$\mathbf{F} = - \frac{\gamma mm'}{r^2} \mathbf{u}_r. \quad (13.2)$$

Esta fuerza es igual al gradiente de la energía potencial pero con signo negativo. En nuestro caso, como la fuerza es central y actúa a lo largo del radio, la energía potencial depende solamente de  $r$  y es suficiente aplicar la ec. (8.25) esto es,  $F_r = - \partial E_p / \partial r$ . Entonces  $F_r = - \gamma mm' / r^2$  y

$$\frac{\partial E_p}{\partial r} = \frac{\gamma mm'}{r^2}.$$

Integrando, y asignando el valor cero a la energía potencial a distancias muy grandes ( $r = \infty$ ), obtenemos

$$\int_0^{E_p} dE_p = \gamma mm' \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2},$$

dando para la energía potencial gravitacional del sistema compuesto de las masas  $m$  y  $m'$ , la expresión

$$E_p = - \frac{\gamma mm'}{r}. \quad (13.3)$$

La energía total del sistema de dos partículas sometidas a su interacción gravitacional es entonces

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m'v'^2 - \frac{\gamma mm'}{r}. \quad (13.4)$$

Para un sistema de más de dos partículas, sometidas a su interacción gravitacional, la energía total es

$$E = \sum_{\text{Todas las partículas}} \frac{1}{2}m_i v_i^2 - \sum_{\text{Todos los pares}} \frac{\gamma m_i m_j}{r_{ij}}.$$

En el caso de dos partículas, refiriendo su movimiento a un sistema de referencia situado en el centro de masa del sistema, podemos usar el resultado del ejemplo 9.9

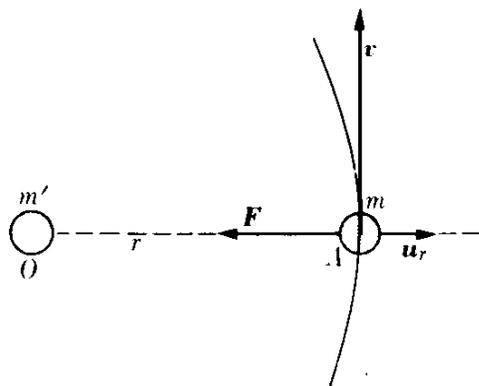


Fig. 13-6. La atracción gravitacional de  $m'$  sobre  $m$  es opuesta al vector unitario  $\mathbf{u}_r$  alejándose de  $m'$ .

para expresar la energía cinética de las dos partículas como  $E_k = \frac{1}{2}\mu v_{12}^2$ , donde  $\mu$  es su masa reducida y  $v_{12}$  es su velocidad relativa, de modo que la energía total en este sistema es

$$E = \frac{1}{2}\mu v_{12}^2 - \gamma \frac{mm'}{r_{12}}.$$

En el caso especial en que la masa de la partícula  $m'$  es mucho mayor que la masa de  $m$  ( $m' \gg m$ ), tenemos [recordando la definición de masa reducida, ec. (9.15)] que  $\mu \approx m$ . En este caso  $m'$  coincide prácticamente con el centro de masa del sistema, y podemos reemplazar la velocidad relativa  $v_{12}$  por la velocidad de  $m$  con respecto al centro de masa, resultando

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\gamma mm'}{r}. \quad (13.5)$$

Si la partícula se mueve en una órbita circular, la fuerza que actúa sobre la masa está dada por la ec. (7.28),  $F_N = mv^2/r$ , y, reemplazando  $F_N$  por la fuerza gravitatoria de la ec. (13.1), tenemos

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{\gamma mm'}{r^2}.$$

Por consiguiente

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{\gamma mm'}{r}$$

y la ec. (13.5) se reduce a

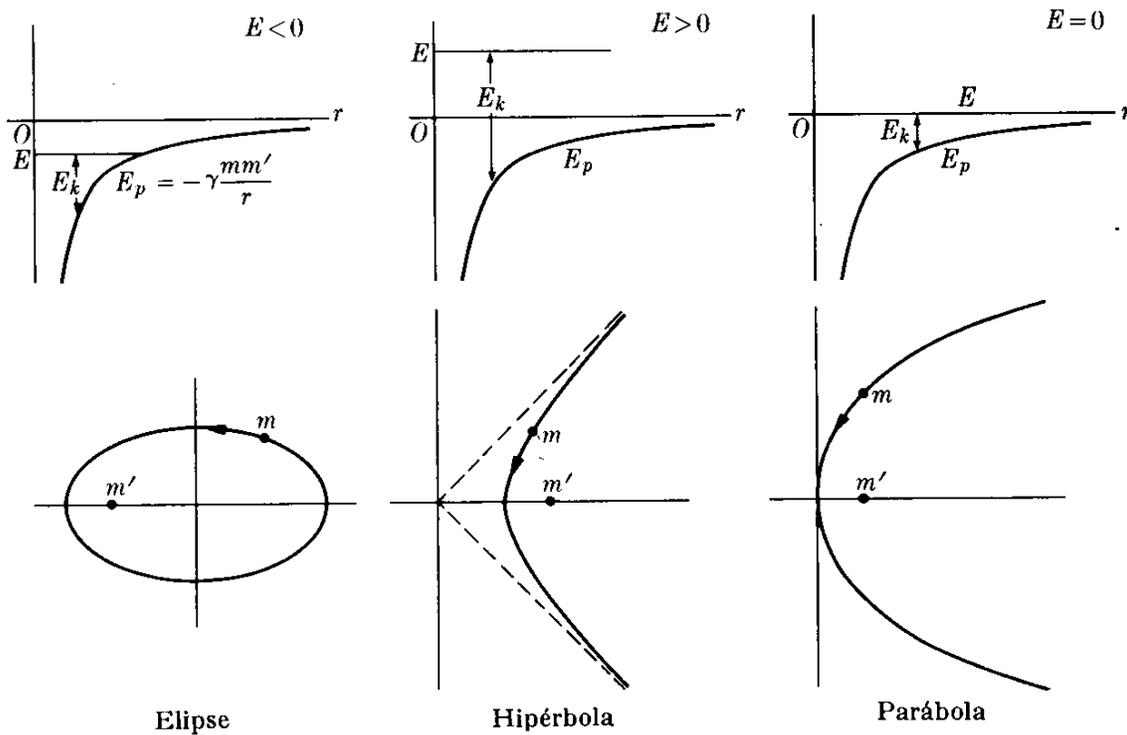
$$E = - \frac{\gamma mm'}{2r}, \quad (13.6)$$

indicando que la energía total es negativa. Este resultado es más general que lo que nuestra demostración pueda sugerir; todas las órbitas *elípticas* (o cerradas) tienen una energía total negativa ( $E < 0$ ) cuando definimos la energía potencial como cero para una separación infinita. Una órbita cerrada significa que la energía cinética no es suficiente en ningún punto de la órbita para llevar la partícula al infinito, para lo cual cambiaría su energía cinética en energía potencial y vencería la atracción gravitacional. Esto puede verse porque, a una distancia infinita, el segundo término de la ec. (13.5) vale cero, y debemos tener  $E = \frac{1}{2}mv^2$ , una ecuación imposible de satisfacer si  $E$  es negativa.

Pero si la energía es positiva ( $E > 0$ ), la partícula puede llegar al infinito y tener aún energía cinética. En la ec. (13.5) si suponemos  $r = \infty$ , y designamos la velocidad en el infinito por  $v_\infty$ , la energía cinética en el infinito es

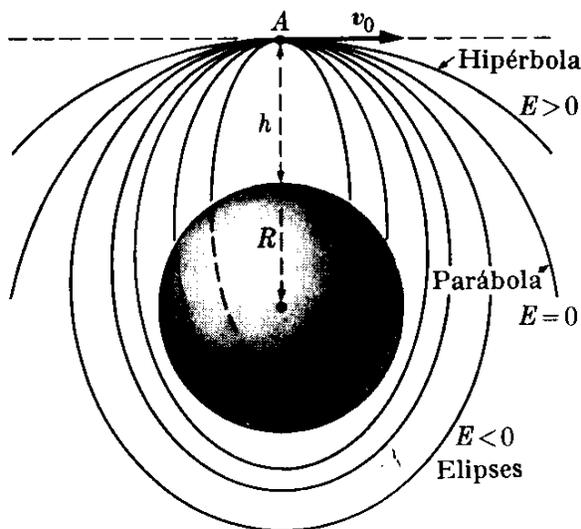
$$\frac{1}{2}mv_\infty^2 = E \quad \text{ó} \quad v_\infty = \sqrt{2E/m}. \quad (13.7)$$

Este resultado puede interpretarse de la siguiente manera. Supongamos que la partícula  $m$  se encuentra a una distancia muy grande de  $m'$  y se le arroja hacia ella con velocidad  $v_\infty$ , denominada *velocidad de aproximación*, de modo que la



**Fig. 13-7.** Relación entre la energía total y la trayectoria en el movimiento bajo una fuerza que varía inversamente con el cuadrado de la distancia.

energía total se determina por la ec. (13.7). Mientras la partícula  $m$  se aproxima a  $m'$ , su energía potencial disminuye (volviéndose más negativa), y la energía cinética aumenta hasta que alcanza su máximo valor en el punto de mayor proximidad, el cual depende del momento angular de la partícula (recordar la sección 8.11 y la Fig. 8-18). Entonces la partícula comienza a alejarse, pierde energía cinética y eventualmente, a grandes distancias, recupera la velocidad  $v_\infty$ . La trayectoria es una curva abierta, y puede demostrarse que es una *hipérbola* (sección 13.5).



**Fig. 13-8.** Trayectorias de una partícula lanzada horizontalmente desde una altura  $h$  sobre la superficie terrestre con una velocidad  $v_0$ .

El caso particular de energía total cero ( $E = 0$ ) es interesante porque entonces la partícula, de acuerdo a la ec. (13.7), se encuentra en reposo en el infinito ( $v_\infty = 0$ ). La órbita está aún abierta pero en lugar de ser una hipérbola, es ahora una *parábola*. Físicamente corresponde a la situación en la cual se suelta una partícula  $m$  a una distancia de  $m'$  con una velocidad inicial que hace iguales su energía cinética y su energía potencial.

La Fig. 13-7 muestra los tres casos posibles, indicando en cada caso la energía total, la energía potencial, la energía cinética, y el tipo de órbita.

Estos resultados son muy importantes cuando se desea colocar en órbita un satélite artificial. Supongamos que un satélite se lanza desde la tierra. Después de alcanzar su máxima altura  $h$  debida al lanzamiento, recibe un impulso final en el punto  $A$ , produciendo una velocidad horizontal  $v_0$  (Fig. 13-8). La energía total del satélite en  $A$  es

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\gamma m M}{R + h}.$$

La órbita será una elipse, una parábola, o una hipérbola dependiendo de que  $E$  sea negativo, cero o positivo. En todos los casos el centro de la tierra se encuentra en un foco de la trayectoria. Si la energía es pequeña, la órbita elíptica intersectará la tierra y el satélite retornará. Si no lo fuera se moverá en una órbita cerrada, o escapará de la tierra, dependiendo del valor de  $v_0$ .

La misma lógica se aplica a un satélite natural como la luna. Obviamente para satélites interplanetarios puede requerirse una órbita con energía positiva. En cualquier caso, generalmente se requiere algún mecanismo de guía para ajustar la trayectoria después del lanzamiento.

**EJEMPLO 13.3.** La velocidad de escape es la velocidad mínima con la cual debe lanzarse un cuerpo desde la tierra para que llegue al infinito. Calcular la velocidad de escape de un cuerpo lanzado desde la tierra.

**Solución:** A fin de que la partícula llegue al infinito, la energía total debe ser cero o positiva, y obviamente la mínima velocidad corresponderá a la energía total cero. Por consiguiente, de la ec. (13.5) con  $E = 0$ , y denominando  $M$  la masa de la tierra,  $R$  su radio, y  $v_e$  la velocidad de escape del proyectil, tenemos  $\frac{1}{2}mv_e^2 - \gamma mM/R = 0$ , la cual da la relación necesaria entre  $v_e$  y  $R$  en la plataforma de lanzamiento. Por consiguiente la velocidad de escape desde la tierra es

$$v_e = \sqrt{2\gamma M/R} = 1,13 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}. \quad (13.8)$$

que es igual a 40.700 km/hr o alrededor de 25.280 mi/hr. Nótese que la velocidad de escape es independiente de la masa del cuerpo. Sin embargo, la fuerza requerida para acelerar un cuerpo hasta que alcance la velocidad de escape depende de la masa del cuerpo, y esta es la razón por la cual los proyectiles y satélites requieren de motores muy poderosos.

Un proyectil lanzado desde la tierra con una velocidad  $v_e$  dada por la ec. (13.8) tendrá velocidad cero cuando llegue al infinito. Si la velocidad es mayor que  $v_e$  la partícula llegará al infinito con alguna velocidad. Si la velocidad de lanzamiento es menor que  $v_e$ , la partícula regresará a la tierra, a menos que sea colocada en una órbita limitada mediante sucesivas etapas del cohete propulsor y se cambie la dirección de la velocidad, como se explicó en conexión con la Fig. 13-8.

El concepto de velocidad de escape es también útil al determinar el escape de los gases de la atmósfera terrestre. Si suponemos que los gases que constituyen la atmósfera se encuentran en equilibrio térmico, la velocidad rcm de sus moléculas está dada por la ec. (9.59) como

$$v_{\text{rcm}} = \sqrt{3kT/m}. \quad (13.9)$$

La velocidad raíz media cuadrática de los gases encontrados en la atmósfera terrestre a su temperatura promedio son: hidrógeno, 1908 m s<sup>-1</sup>; helio, 1350 m s<sup>-1</sup>; nitrógeno, 510 m s<sup>-1</sup>; oxígeno, 477 m s<sup>-1</sup>; y bióxido de carbono, 407 m s<sup>-1</sup>. En todos los casos la  $v_{\text{rcm}}$  es menor que la  $v_e$ , y podemos llegar a la conclusión que ninguna

molécula de gas puede vencer la atracción gravitacional y escapar de la tierra. Pero esto sería una conclusión falsa.

La velocidad raíz media cuadrática  $v_{\text{rcm}}$  es una velocidad promedio, y ello significa que hay muchas moléculas que se mueven con velocidades mayores o menores que  $v_{\text{rcm}}$ . Aún si  $v_{\text{rcm}}$  es menor que  $v_e$ , un cierto número de moléculas se mueven con velocidades iguales o mayores que  $v_e$ , y éstas pueden escapar de la tierra, especialmente si se encuentran en las capas superiores de la atmósfera. De las cifras arriba indicadas, vemos que este efecto es más importante para los gases ligeros que para los pesados, y ésta es una de las razones por la cual el hidrógeno y el helio son escasos en nuestra atmósfera. Se ha estimado que, debido a este efecto gravitatorio, el hidrógeno escapa de la tierra a un promedio de  $1,3 \times 10^{22}$  átomos por segundo, lo cual equivale aproximadamente a 600 kg por año. Sin embargo, esto no representa la pérdida total de hidrógeno de la superficie terrestre, y la pérdida neta puede ser diferente debido a otros procesos.

Para el planeta Mercurio, la velocidad de escape es mucho menor que para la tierra; lo más probable es que haya perdido casi toda su atmósfera. Lo mismo es cierto para la luna. Venus tiene una velocidad de escape casi igual a la de la tierra. Marte tiene una velocidad de escape alrededor de 1/6 la de la tierra, y por ello retiene algo de su atmósfera, pero ha perdido proporcionalmente una fracción mayor de su atmósfera. De hecho, la presión atmosférica de Marte es mucho menor que la de la tierra. Para los otros planetas, la velocidad de escape es mayor que la de la tierra, y por ello todavía retienen la mayor parte de sus atmósferas originales. Sin embargo, por otras razones, la composición de las atmósferas de estos planetas son diferentes de la de la tierra.

**EJEMPLO 13.4.** Determinar la velocidad de un cuerpo, que se suelta a una distancia  $r$  del centro de la tierra, al llegar a la superficie terrestre.

**Solución:** La velocidad inicial del cuerpo es cero y su energía total, de acuerdo a la ec. (13.5) es por consiguiente

$$E = -\frac{\gamma mM}{r},$$

donde  $m$  es la masa del cuerpo y  $M$  la masa de la tierra. Cuando llega a la superficie terrestre, su velocidad es  $v$  y su distancia al centro de la tierra es el radio de la tierra  $R$ . Por ello

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\gamma mM}{R}.$$

Igualando ambos valores de  $E$ , ya que la energía ha permanecido constante (despreciamos la fricción atmosférica), tenemos

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\gamma mM}{R} = -\frac{\gamma mM}{r}.$$

Despejando  $v^2$ , obtenemos

$$v^2 = 2\gamma M \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right).$$

O, recordando del ejemplo 13.1 que  $g = \gamma M/R^2$  se obtiene

$$v^2 = 2R^2g \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right). \quad (13.10)$$

Esta expresión puede también usarse para encontrar la distancia  $r$  alcanzada por un cuerpo lanzado verticalmente con velocidad  $v$  desde la superficie terrestre.

Si el cuerpo se suelta a gran distancia de modo que  $1/r$  es despreciable comparado con  $1/R$ , obtendremos

$$v_{\infty} = \sqrt{2Rg} = \sqrt{2\gamma M/R} = 1,13 \times 10^4 \text{ m s}^{-1},$$

de acuerdo con el resultado dado en la ec. (13.8) para la velocidad de escape. Esto no es sorprendente, puesto que este problema es justamente el reverso del problema del ejemplo 13.3. El resultado obtenido da, por ejemplo, la velocidad aproximada con la cual un meteorito choca con la superficie de la tierra.

### 13.5 El movimiento general bajo la interacción gravitacional

Hasta el momento hemos establecido las leyes de Kepler solamente para órbitas elípticas. En la sección 13.2 hemos demostrado que, de acuerdo a estas leyes, el movimiento se produce, por lo menos en el caso de las órbitas circulares, cuando la fuerza es de atracción e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Sin embargo, en la sección 13.4, cuando discutimos la energía, indicamos que estas leyes se cumplen para órbitas hiperbólicas y parabólicas, además de cumplirse en las elípticas. Verifiquemos ahora esta afirmación.

En el capítulo 8 desarrollamos una relación (ec. 8.42) entre las coordenadas polares de una partícula en función de las magnitudes dinámicas del movimiento. Si usamos la ec. (8.37) para la energía potencial efectiva, podemos escribir dicha relación en la forma siguiente

$$\left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 = \frac{m^2 r^4}{L^2} \left\{ \frac{2[E - E_p(r)]}{m} - \frac{L^2}{m^2 r^2} \right\}, \quad (13.11)$$

donde  $L$  es el momentum angular de la partícula. Ahora la ecuación de una sección cónica en coordenadas polares con el origen en un foco (ver la nota al final de esta sección) es

$$\frac{\epsilon d}{r} = 1 + \epsilon \cos \theta, \quad (13.12)$$

donde  $\epsilon$  es la excentricidad y  $d$  la distancia del foco a la directriz. Derivando la expresión con respecto a  $\theta$ , obtenemos

$$-\frac{\epsilon d}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\epsilon \sin \theta,$$

y así

$$\left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 = \frac{r^4 \sin^2 \theta}{d^2}.$$

Sustituyendo en la ec. (13.11) y cancelando  $r^4$  en ambos lados, podemos escribir

$$\sin^2 \theta = \frac{d^2 m^2}{L^2} \left\{ \frac{2[E - E_p(r)]}{m} - \frac{L^2}{m^2 r^2} \right\}.$$

Ahora, de la ec. (13.12),  $\cos \theta = d/r - 1/\epsilon$ . Por consiguiente

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left( \frac{d}{r} - \frac{1}{\epsilon} \right)^2 = 1 - \frac{d^2}{r^2} + \frac{2d}{\epsilon r} - \frac{1}{\epsilon^2}.$$

Sustituyendo en la ecuación previa, se obtiene

$$1 - \frac{d^2}{r^2} + \frac{2d}{\epsilon r} - \frac{1}{\epsilon^2} = \frac{2 d^2 m E}{L^2} - \frac{2 d^2 m E_p(r)}{L^2} - \frac{d^2}{r^2}.$$

Cancelando el término  $d^2/r^2$  en ambos lados e igualando aquellos términos que son constantes y aquellos dependientes de  $r$ , obtenemos

$$\frac{2 d^2 m E}{L^2} = 1 - \frac{1}{\epsilon^2} \quad \text{ó} \quad E = \frac{L^2}{2 d^2 m} \left( 1 - \frac{1}{\epsilon^2} \right) \quad (13.13)$$

y

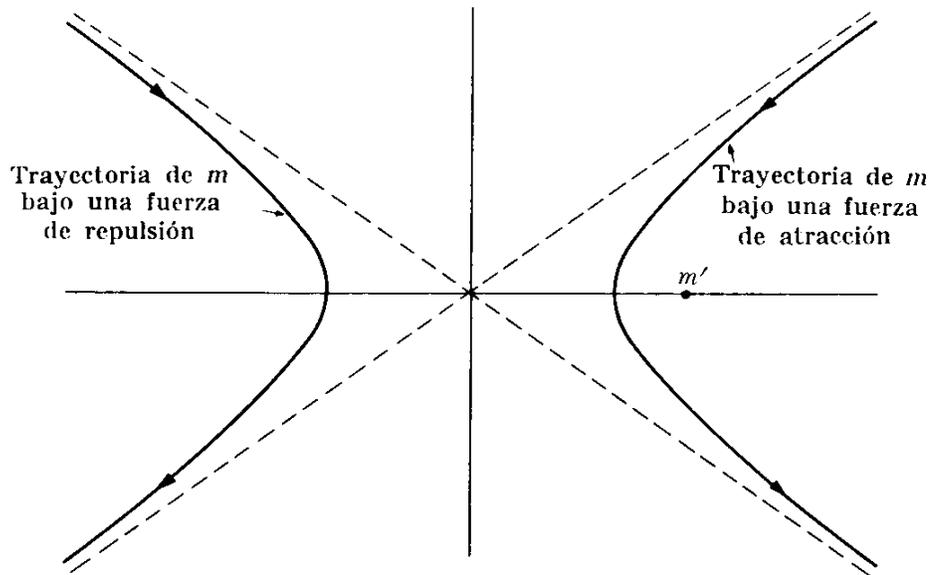
$$-\frac{2 d^2 m E_p(r)}{L^2} = \frac{2d}{\epsilon r} \quad \text{ó} \quad E_p(r) = -\frac{L^2}{m d \epsilon r}. \quad (13.14)$$

La ec. (13.14) indica que, para describir una sección cónica con el centro de fuerzas en un foco, la energía potencial  $E_p(r)$  debe variar con la distancia como  $1/r$ , y por consiguiente la fuerza, la cual es  $F_r = -\partial E_p/\partial r$ , debe variar como  $1/r^2$ . Esto generaliza la primera ley de Kepler al incluir la hipérbola y la parábola, además de la elipse, como órbitas posibles.

La órbita será una elipse, parábola, o hipérbola dependiendo de que la excentricidad  $\epsilon$  sea menor que, igual a, o mayor que, uno. De la ec. (13.13) vemos que esta relación corresponde a una energía total  $E$  negativa, cero, o positiva, verificando así nuestra discusión de la sección 13.4.

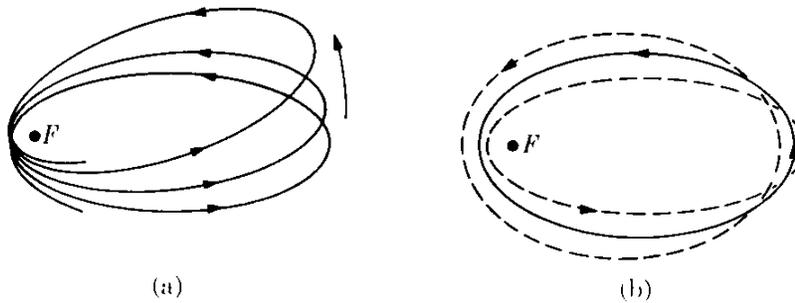
Debemos notar que una hipérbola tiene dos ramas, y bajo la acción de una fuerza de atracción se describe solamente la rama con respecto al centro de atracción (rama derecha de la Fig. 13-9). Si la fuerza es de repulsión, esto es  $F = +C/r^2$ , la órbita corresponde a la rama de la izquierda de la Fig. 13-9. En este caso, esto es, para una fuerza de repulsión, la energía potencial es  $E_p = +C/r$ , y es positiva. Por lo tanto, la energía total  $E = \frac{1}{2}mv^2 + C/r$  es siempre positiva y no hay órbitas limitadas. Ya hemos considerado el movimiento bajo la acción de una fuerza de repulsión que varía con el inverso del cuadrado de la distancia cuando discutimos la dispersión en el ejemplo 7.16.

Las consideraciones precedentes serían suficientes para proporcionar un análisis completo del movimiento planetario si supiéramos que el movimiento de un planeta alrededor del sol no fuera afectado por los otros planetas y cuerpos celestes. En otras palabras la órbita de la tierra (y de todos los otros planetas) sería una elipse perfecta si no hubiera otras fuerzas, además de la del sol actuando sobre la tierra. Sin embargo, la presencia de otros planetas introduce perturbaciones en la órbita de un planeta. Estas perturbaciones pueden calcularse con gran exactitud mediante técnicas especiales que constituyen la ciencia llamada mecánica celeste. Las perturbaciones pueden ser analizadas, esencialmente, por dos efectos. Un efecto es que la órbita elíptica de un planeta no es



**Fig. 13-9.** Trayectorias hiperbólicas bajo fuerzas de atracción y de repulsión que varían con el inverso del cuadrado de la distancia.

cerrada, sino que el eje mayor de la elipse rota muy lentamente alrededor del foco donde está situado el sol, efecto que se denomina avance del perihelio (Fig. 13-10a). El otro efecto es una variación periódica de la excentricidad de la elipse con respecto a su valor promedio, como se indica en la Fig. 13-10(b). Estos cambios ocurren muy lentamente. En el caso de la tierra tienen un período del orden de  $10^5$  años (alrededor de  $21'$  de arco por siglo para el movimiento del perihelio). Aun así, han producido efectos notables, especialmente en los cambios lentos de las condiciones climáticas de la tierra. Estos cambios han sido indicados por los geofísicos que han estudiado las diferentes capas de la corteza terrestre.



**Fig. 13-10.** Perturbaciones en el movimiento planetario. (a) Rotación del eje de la elipse. (b) Oscilación en la excentricidad de la elipse. Los dos efectos han sido grandemente exagerados.

Al discutir el movimiento en un campo gravitacional hemos supuesto que puede usarse la mecánica newtoniana de los capítulos 7 y 8. Sin embargo, un análisis más preciso requiere el uso de la teoría general de la relatividad de Einstein (ver sección 13.8). Uno de los principales efectos relativísticos es una rotación *adi-*

cional del eje mayor de la órbita de un planeta. Este efecto relativístico es máximo para la órbita de Mercurio, el planeta más cercano al sol y el cual tiene una de las órbitas más excéntricas. El avance observado del perihelio de Mercurio excede, cerca de 42'' de arco por siglo, el efecto calculado por medio de la mecánica Newtoniana que toma en cuenta la perturbación de los otros planetas. La teoría general de la relatividad de Einstein predice precisamente este avance adicional del perihelio. Este efecto relativístico es mucho menor para otros planetas, y no se ha observado aún.

**Nota sobre secciones cónicas:** Una familia importante de curvas planas son las *secciones cónicas*. Una sección cónica se define como una curva generada por un punto que se mueve de modo que la relación entre su distancia a un punto denominado *foco*, y a una línea, llamada *directriz*, es constante. Hay tres clases de secciones cónicas, llamadas elipse, parábola, e hipérbola, dependiendo de si esta constante (llamada la excentricidad) es menor que, igual a, o mayor que, uno. Designando la excentricidad por  $\epsilon$ , el foco por  $F$ , y la directriz por  $HQD$  (Fig. 13-11), tenemos

$$\epsilon = PF/PQ.$$

Ahora  $PF = r$ , y si establecemos que  $FD = d$ , entonces  $PQ = FD - FB = d - r \cos \theta$ . Luego  $\epsilon = r/(d - r \cos \theta)$ . O, despejando  $r$ , encontramos que

$$\frac{\epsilon d}{r} = 1 + \epsilon \cos \theta.$$

Esta es la forma de la ecuación de una sección cónica que se ha usado en el texto (ec. 13.12). (En algunos textos, la ecuación de la sección cónica es derivada usando el ángulo  $\pi - \theta$ , y por ello la ecuación aparece en la forma  $\epsilon d/r = 1 - \epsilon \cos \theta$ .) En el caso de una elipse, que es una curva cerrada, el punto  $A$  corresponde a  $\theta = 0$  y el punto  $A'$  a  $\theta = \pi$ . Así, de acuerdo a la ecuación polar, tenemos

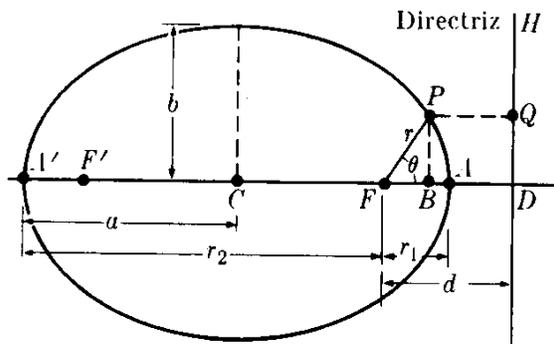


Fig. 13-11. Elementos geométricos de la elipse.

$$r_1 = \frac{\epsilon d}{1 + \epsilon} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{\epsilon d}{1 - \epsilon}.$$

Luego, como  $r_1 + r_2 = 2a$ , el semieje mayor está dado por

$$a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = \frac{\epsilon d}{1 - \epsilon^2}.$$

El semieje menor es  $b = a \sqrt{1 - \epsilon^2}$  y el área de la elipse es

$$S = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}.$$

Un círculo es un caso especial de una elipse cuando  $\epsilon = 0$ . (Para mayores detalles sobre secciones cónicas, y en particular la elipse, ver G. B. Thomas, *Cálculo infinitesimal y geometría analítica*, tercera edición. Madrid: Aguilar, 1964, pág. 473).

**EJEMPLO 13.5.** En el caso del movimiento elíptico, relacionar la energía total y el momentum angular, con el semieje mayor  $a$  y la excentricidad  $\epsilon$  de la elipse.

**Solución:** De la nota precedente sobre secciones cónicas, sabemos que el semieje mayor de una elipse se expresa en función de la excentricidad  $\epsilon$  y la distancia  $d$  de acuerdo con

$$a = \frac{\epsilon d}{1 - \epsilon^2}.$$

Por consiguiente, de la ec. (13.13) tenemos

$$E = \frac{L^2}{2 d^2 m} \cdot \frac{\epsilon^2 - 1}{\epsilon^2} = - \frac{L^2}{2 \epsilon d m a}.$$

Pero de la ec. (13.14) con  $E_p = -\gamma m m' / r$ , tenemos

$$- \frac{\gamma m m'}{r} = - \frac{L^2}{m \epsilon d r} \quad \text{ó} \quad \frac{L^2}{m \epsilon d} = \gamma m m'.$$

Realizando la sustitución correspondiente en la expresión de  $E$ , obtenemos

$$E = - \frac{\gamma m m'}{2a}.$$

Comparando este resultado con la ec. (13.6), que derivamos para órbitas circulares, vemos que son esencialmente idénticas, ya que  $a = r$  para una órbita circular. Este resultado también confirma el hecho de que la energía total es negativa y depende solamente del semieje mayor  $a$ . De modo que todas las órbitas elípticas que tienen el mismo semieje mayor como se ilustra en la Fig. 13-12 tienen la misma energía total, aunque diferentes excentricidades. Usando la expresión  $\epsilon d = a(1 - \epsilon^2)$ , podemos escribir otra relación útil:

$$L^2 = \gamma m^2 m' \epsilon d = \gamma m^2 m' a (1 - \epsilon^2).$$

Eliminando el semieje mayor  $a$  usando la expresión previa de la energía  $E$ , obtenemos la excentricidad de la órbita.

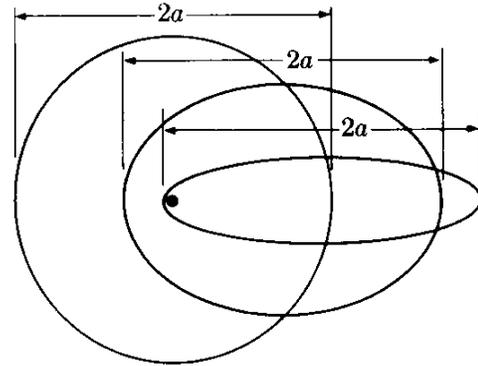
$$\epsilon^2 = 1 + \frac{2E}{m} \left( \frac{L}{\gamma m m'} \right)^2.$$

Vemos así que la excentricidad depende de la energía y el momentum angular. Las órbitas ilustradas en la Fig. 13-12 tienen todas la misma energía, pero diferente momentum angular y tienen diferentes excentricidades. En otras palabras, *en un campo que varía con el inverso del cuadrado de la distancia, a una energía total dada pueden corresponder diferentes estados de momentum angular*. Esto es de gran importancia en la discusión de la estructura atómica, debido a que en un átomo puede haber varios electrones que tienen la misma energía pero diferente momentum angular.

Resumimos los resultados precedentes diciendo que el "tamaño" de la órbita (dado por el semieje mayor) es *determinado por la energía*, y que *para una energía dada, la "forma" de la órbita (dada por la excentricidad) está determinada por el momentum angular*.

**EJEMPLO 13.6.** Verificar que la tercera ley de Kepler se cumple en órbitas elípticas.

**Solución:** Recordemos que en la sección 13.2 usamos la tercera ley de Kepler para verificar la ley del inverso del cuadrado para la fuerza en el caso de órbitas circulares. Verificaremos ahora que esta ley se cumple también para cualquier órbita



**Fig. 13-12.** Órbitas elípticas para diferentes valores del momentum angular pero igual energía. Todas las órbitas tienen el mismo foco y eje mayor, pero difieren en excentricidad.

elíptica. La demostración es de manipulación algebraica directa basada en las propiedades de la elipse.

De la ec. (7.35), que expresa la constancia del momento angular, tenemos que

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m} \quad \text{ó} \quad r^2 d\theta = \frac{L}{m} dt.$$

En un período  $P$  el radio vector barre el área de la elipse y  $\theta$  varía de 0 a  $2\pi$ . Por ello podemos obtener el área de la elipse escribiendo:

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{L}{2m} \int_0^P dt = \frac{LP}{2m}.$$

Pero el área de la elipse es  $\pi a^2(1 - \epsilon^2)^{1/2}$  (ver la nota al final de la sección 13.5). Por consiguiente

$$\pi^2 a^4 (1 - \epsilon^2) = L^2 P^2 / 4m^2.$$

Pero del ejemplo 13.5 tenemos que  $L^2 = \gamma m^2 m' a (1 - \epsilon^2)$ . Por lo tanto

$$\pi^2 a^3 = \frac{1}{2} \gamma m' P^2 \quad \text{ó} \quad P^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma m'} a^3,$$

que es la tercera ley de Kepler, ya que el valor promedio de  $r$  es obviamente proporcional al semieje mayor  $a$ .

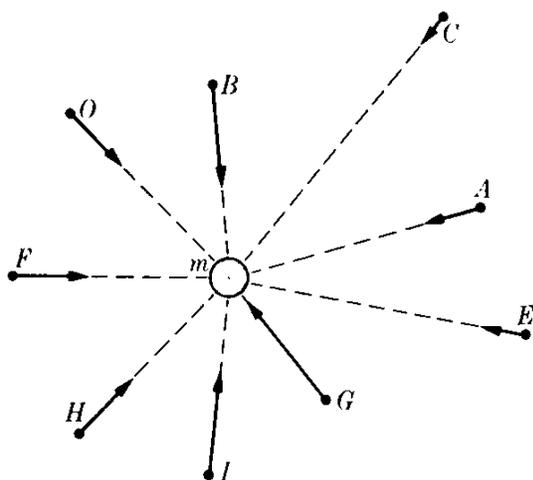
### 13.6 El campo gravitacional

Introduciremos ahora un concepto muy importante en física, el de *campo gravitacional*. Supongamos que tenemos una masa  $m$  y que colocamos, en diferentes posiciones alrededor de  $m$ , otra masa  $m'$  (Fig. 13-13). En cada posición la masa  $m'$  experimenta una fuerza debida a su interacción gravitacional con  $m$  y dada por la ec. (13.2),

$$\mathbf{F} = - \frac{\gamma m m'}{r^2} \mathbf{u}_r.$$

Por supuesto, que en cada posición de  $m'$ , la masa  $m$  experimenta una fuerza igual y opuesta. Sin embargo, por el momento solamente estamos interesados en lo que le pasa a  $m'$ .

Podemos decir que la masa  $m$  produce, en el espacio que la rodea, una situación física que llamamos un *campo gravitacional*, y que se reconoce por la fuerza que  $m$  ejerce sobre otra masa, tal como  $m'$ , colocada en dicha región. Si existe algún efecto en el espacio vacío alrededor de  $m$ , aun cuando no usamos una carga de prueba  $m'$  para examinar el campo, es algo sobre lo que sólo podemos especular,



**Fig. 13-13.** El campo gravitacional producido por una masa puntual en varios puntos.

y es hasta cierto punto una interrogante sin importancia, ya que notamos el campo gravitatorio solamente cuando usamos una segunda masa.

La *intensidad del campo gravitacional*  $\mathcal{G}$  producida por la masa  $m$  en el punto  $P$  se define como la fuerza ejercida sobre la unidad de masa colocada en  $P$ . Luego

$$\mathcal{G} = \frac{\mathbf{F}}{m'} = -\frac{\gamma m}{r^2} \mathbf{u}_r.$$

(13.15)

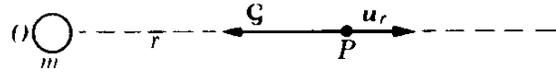


Fig. 13-14. El campo gravitacional en  $P$ , producido por la masa puntual  $m$ , es opuesto al vector unitario  $\mathbf{u}_r$ .

Luego el campo gravitacional  $\mathcal{G}$  tiene dirección opuesta a la del vector unitario  $\mathbf{u}_r$ , el cual se dirige de la masa que produce el campo al punto donde se calcula el campo. En otras palabras, *el campo gravitacional siempre señala hacia la masa que lo produce*.

La expresión (13.15) da el campo gravitacional a una distancia  $r$  de una partícula de masa  $m$  colocada en  $O$ . Podemos asociar entonces con cada punto en el espacio alrededor de  $m$  (Fig. 13-14) un vector  $\mathcal{G}$  dado por la ec. (13.15), tal que la fuerza gravitacional ejercida sobre cualquier masa colocada en dicha región se obtiene multiplicando la masa por el valor correspondiente de  $\mathcal{G}$ . Esto es,  $\mathbf{F} = (\text{masa de la partícula}) \times \mathcal{G}$ .

De la definición vemos que la intensidad del campo gravitacional se mide en  $\text{N kg}^{-1}$  o  $\text{m s}^{-2}$ , y es dimensionalmente equivalente a una aceleración. Comparando la ec. (13.15) con la ec. (7.16), notamos que la aceleración de la gravedad puede considerarse como la intensidad del campo gravitacional en la superficie de la tierra.

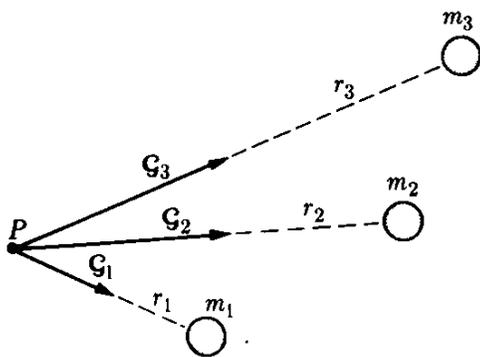


Fig. 13-15. Campo gravitacional resultante de varias masas.

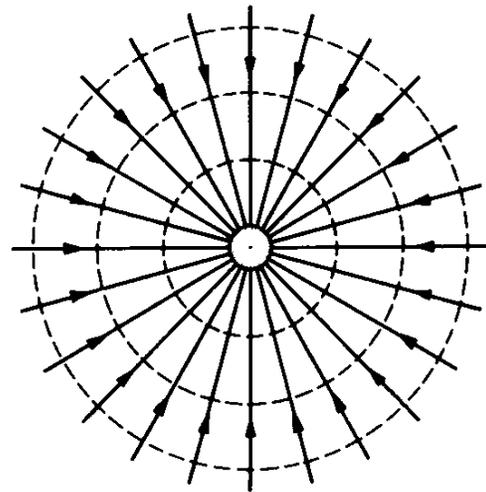


Fig. 13-16. Líneas de fuerza y superficies equipotenciales del campo gravitacional de una masa puntual.

Supongamos ahora que tenemos varias masas  $m_1, m_2, m_3, \dots$  (Fig. 13-15), cada una produciendo su propio campo gravitacional. La fuerza total de una partícula

de masa  $m$  en  $P$  es obviamente

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= m\mathcal{G}_1 + m\mathcal{G}_2 + m\mathcal{G}_3 + \dots \\ &= m(\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_3 + \dots) = m\mathcal{G}, \end{aligned} \quad (13.16)$$

donde  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \dots$  son los campos gravitacionales producidos por cada masa en el punto  $P$ , y se calculan de acuerdo a la ec. (13.15). El campo gravitacional resultante en el punto  $P$  es por lo tanto el vector suma

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_3 + \dots = \gamma \sum_i \frac{m_i}{r_i^2} \mathbf{u}_{ri}. \quad (13.17)$$

Un campo gravitacional puede representarse figurativamente por *líneas de fuerza*. Se traza una línea de fuerza de modo que en cada punto la *dirección* del campo es tangente a la línea que pasa por el punto. Las líneas de fuerza se trazan de modo que su densidad sea proporcional a la *intensidad* del campo. La Fig. 13-16 muestra el campo alrededor de una masa puntual; todas las líneas de fuerza son radiales y la intensidad del campo es mayor cerca a la masa. La Fig. 13-17 muestra el campo alrededor de dos masas desiguales, es decir, la tierra y la luna. Aquí las líneas no son radiales y en la vecindad del punto  $A$  la intensidad es muy débil (en  $A$  es cero).

Otro concepto importante es el de *potencial gravitacional*, definido como la energía potencial por unidad de masa colocada en el campo gravitacional. Así, si en un cierto punto en un campo gravitacional, una masa  $m'$  tiene una energía potencial  $E_p$ , el potencial gravitacional en dicho punto es  $V = E_p/m'$ . El potencial gravitacional se expresa en las unidades  $\text{J kg}^{-1}$  o  $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$ .

De la ec. (13.3), dividiendo por  $m'$ , vemos que el potencial gravitacional a una distancia  $r$  de una masa  $m$  es

$$V = -\gamma m/r. \quad (13.18)$$

Si en lugar de una partícula, tenemos varias masas, como en la Fig. 13-15, el potencial gravitacional en  $P$  es la suma escalar  $V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots$ , o

$$V = -\gamma \left( \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \dots \right) = -\gamma \sum_i \frac{m_i}{r_i}. \quad (13.19)$$

Comparando la ec. (13.18) con la ec. (13.15) notamos que la magnitud del campo gravitacional es

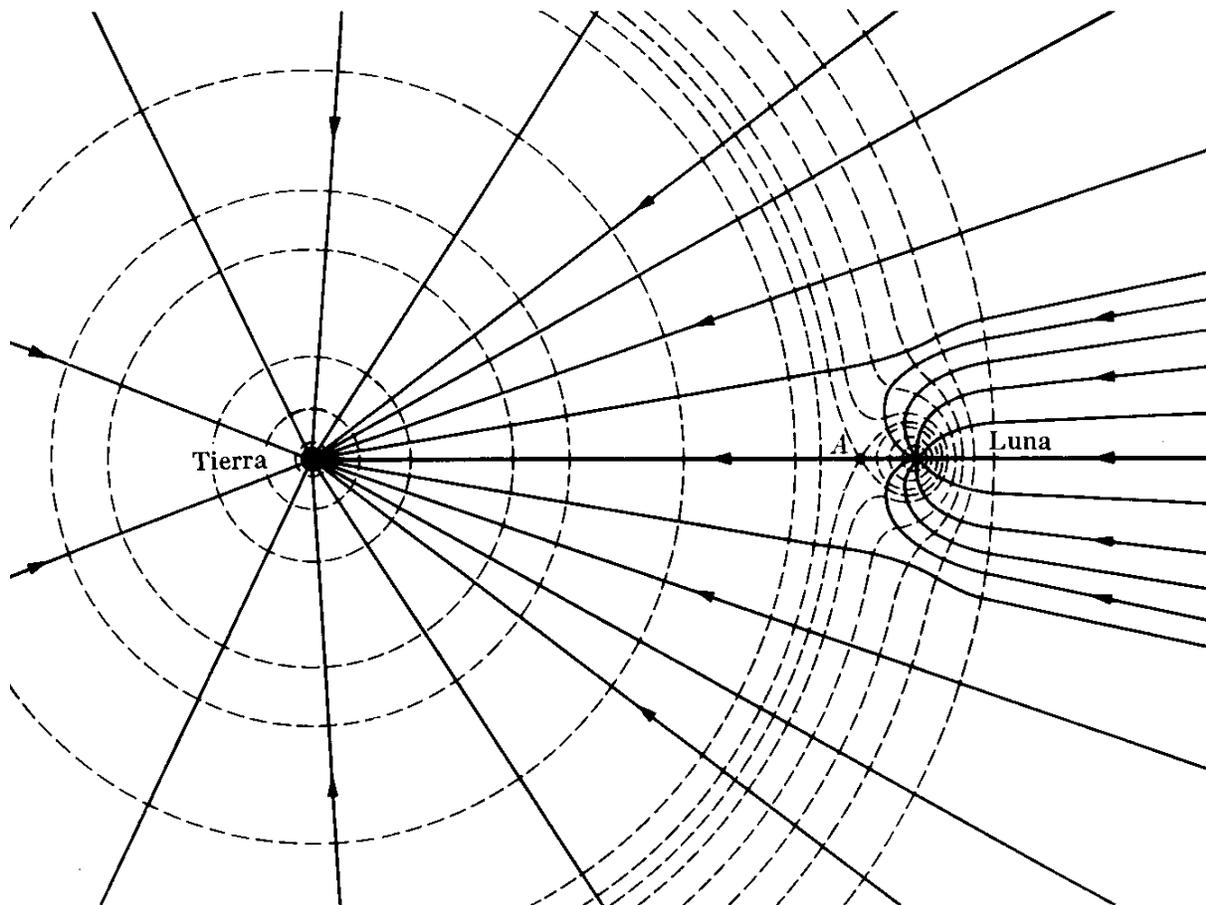
$$\mathcal{G} = -\partial V/\partial r, \quad (13.20)$$

y en general, de la expresión  $\mathbf{F} = -\text{grad } E_p$ , obtenemos

$$\mathcal{G} = -\text{grad } V, \quad (13.21)$$

donde "grad" significa gradiente, como se indicó en la sección 8.7. Por consiguiente, *el campo gravitacional es el gradiente con signo negativo del potencial gravitacional*. En coordenadas rectangulares podemos escribir

$$\mathcal{G}_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \mathcal{G}_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \mathcal{G}_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$



**Fig. 13-17.** Líneas de fuerza y superficies equipotenciales del campo gravitacional resultante, producido por la tierra y la luna. En A el campo gravitacional es cero. [Según W. T. Scott, *Am. J. Phys.* **33**, 712 (1965)].

El concepto de potencial gravitacional es muy útil porque, como es una cantidad escalar, puede calcularse muy fácilmente, como indica la ec. (13.19), y puede obtenerse luego la intensidad del campo gravitacional aplicando la ec. (13.21).

Uniéndolos puntos en los cuales el potencial gravitacional tiene el mismo valor, podemos obtener una serie de superficies llamadas *superficies equipotenciales*. Por ejemplo, en el caso de una sola partícula, cuando el potencial está dado por la ec. (13.18), las superficies equipotenciales corresponden a las esferas  $r = \text{const}$ , indicadas por las líneas punteadas. Nótese que en cada caso las superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas de fuerza. Esto puede verificarse, en general, de la siguiente manera. Consideremos dos puntos, muy cerca uno del otro, sobre la misma superficie equipotencial. Cuando desplazamos una partícula de uno de estos puntos al otro, el trabajo realizado por el campo gravitacional que actúa sobre la partícula es cero. Esto se debe a que el trabajo realizado es igual al cambio en la energía potencial. En este caso no hay cambio en la energía potencial debido a que los dos puntos tienen el mismo potencial gravitacional. El hecho de que el trabajo sea cero implica que la fuerza es perpendicular al desplazamiento. Por consiguiente *la dirección del campo gravitacional es perpendicular a las superficies equipotenciales*. Esto significa que si conocemos

las líneas de fuerza podemos fácilmente representar las superficies equipotenciales, y viceversa.\*

**EJEMPLO 13.7.** Discutir el campo gravitacional producido por dos masas iguales separadas por la distancia  $2a$ .

**Solución:** Colocando nuestros ejes de coordenadas como se indica en la Fig. 13-18 y aplicando la ec. (13.19) para dos masas iguales, tenemos que el potencial gravitacional en  $P(x, y)$  es

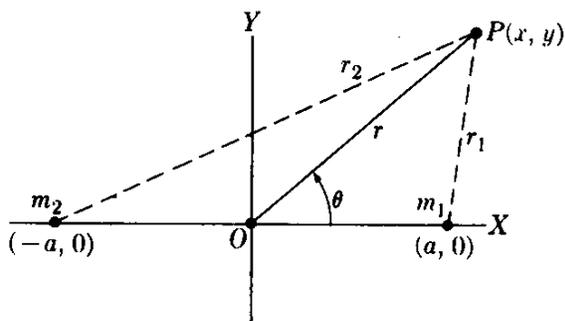


Figura 13-18

$$V = -\gamma m \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right).$$

Ahora de la Fig. 13.18 podemos ver que

$$r_1 = [(x - a)^2 + y^2]^{1/2},$$

$$r_2 = [(x + a)^2 + y^2]^{1/2}.$$

Así

$$V = -\gamma m \left\{ \frac{1}{[(x - a)^2 + y^2]^{1/2}} + \frac{1}{[(x + a)^2 + y^2]^{1/2}} \right\}.$$

El cambio en el potencial gravitacional producido por las dos masas a medida que nos desplazamos de  $-\infty$  a  $+\infty$  lo largo del eje  $X$  se ilustra en la Fig. 13-19. Sugérimos que el estudiante haga un gráfico similar del potencial producido por cuatro masas iguales, espaciadas la misma distancia  $a$  a lo largo de una línea recta.

Para calcular el campo gravitacional, aplicamos la ec. (13.21), usando coordenadas rectangulares, obteniendo

$$g_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\gamma m \left\{ \frac{x - a}{[(x - a)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{x + a}{[(x + a)^2 + y^2]^{3/2}} \right\},$$

$$g_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\gamma m \left\{ \frac{y}{[(x - a)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{y}{[(x + a)^2 + y^2]^{3/2}} \right\}.$$

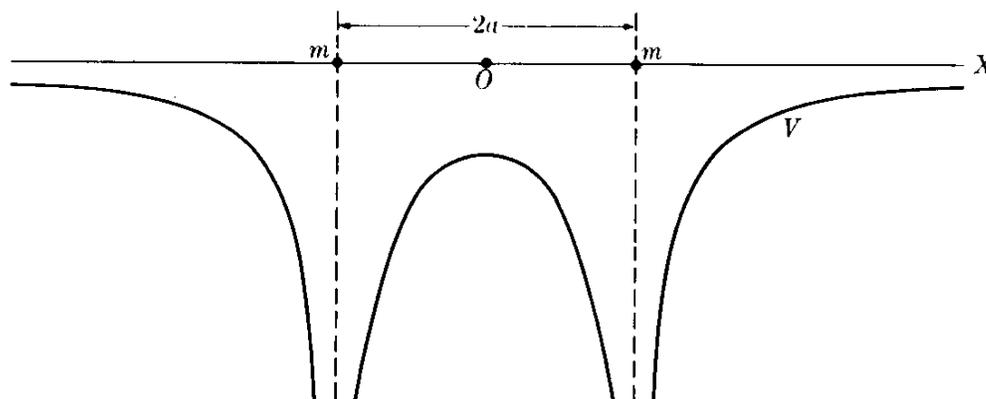


Fig. 13-19. Variación del potencial gravitacional producido por dos masas iguales a lo largo de la línea que los une.

\* Se recuerda al estudiante la nota a continuación de la sección 8.7 respecto al gradiente, donde se demostró que el vector  $\text{grad } E_p$  es perpendicular a las superficies  $E_p = \text{const.}$  Esto es equivalente a la proposición anterior ya que  $\mathcal{G} = -\text{grad } V$ .

El campo tiene simetría de revolución alrededor del eje  $X$ . Sugerimos que el estudiante investigue el campo a lo largo de los ejes  $Y$ - y  $Z$ - y que represente gráficamente las líneas de fuerza; éstas deben ser simétricas alrededor de  $O$ . Sugerimos también que repita el problema, usando las coordenadas polares  $r$ ,  $\theta$  de  $P$ , y que encuentre  $\mathcal{G}_r$  y  $\mathcal{G}_\theta$ .

**EJEMPLO 13.8.** Obtener el campo gravitacional producido por una capa delgada de materia extendida sobre un plano infinito.

**Solución:** Dividamos el plano en una serie de anillos, todos concéntricos, con la proyección  $O$  de  $P$  sobre el plano (Fig. 13-20). Cada anillo tiene un radio  $R$  y un espesor  $dR$ . Luego el área es  $(2\pi R dR)$ . Si  $\sigma$  es la masa por unidad de área sobre el plano, la masa del anillo es  $dm = \sigma(2\pi R dR) = 2\pi\sigma R dR$ . Todos los puntos del anillo se encuentran a la misma distancia  $r$  de  $P$ , y por consiguiente el potencial que produce en  $P$  es

$$dV = -\frac{\gamma dm}{r} = -\frac{2\pi\gamma\sigma R dR}{(z^2 + R^2)^{1/2}},$$

ya que  $r = (z^2 + R^2)^{1/2}$ . Para obtener el potencial total tenemos que sumar las contribuciones de todos los anillos. Esto es, tenemos que integrar la expresión anterior de  $R = 0$  a  $R = \infty$ . El resultado es

$$\begin{aligned} V &= -2\pi\gamma\sigma \int_0^\infty \frac{R dR}{(z^2 + R^2)^{1/2}} = \\ &= -2\pi\gamma\sigma (\infty - z). \end{aligned}$$

Obtenemos así una contribución infinita pero constante del límite superior. Como estamos interesados solamente en la *diferencia* de potencial entre el plano y el punto, que es lo que en realidad medimos experimentalmente, debemos restar de la expresión anterior el valor para  $z = 0$ ; esto es  $-2\pi\gamma\sigma(\infty)$ . Obtenemos finalmente

$$V = 2\pi\gamma\sigma z.$$

Lo que realmente hemos hecho es llevar a cabo un proceso denominado *renormalización*, en el cual asignamos el valor cero al potencial del plano, y debemos por consiguiente restar una cantidad infinita. Esta situación es ilustrativa de casos similares en otras aplicaciones físicas en las que el resultado obtenido es infinito o divergente pero, debido a que estamos interesados solamente en la diferencia entre dos resultados infinitos, esta diferencia puede expresarse por una expresión finita o convergente.

El campo en  $P$  (ya que  $z$  es la coordenada del punto) se obtiene aplicando la ec. (13.20), que da

$$\mathcal{G} = -\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi\gamma\sigma.$$

El signo menos indica que  $\mathcal{G}$  señala hacia el plano. Nótese que nuestro proceso de renormalización no afecta al campo, ya que la derivada de una constante, no importa cuán grande sea, es siempre cero. El campo gravitacional es así constante o

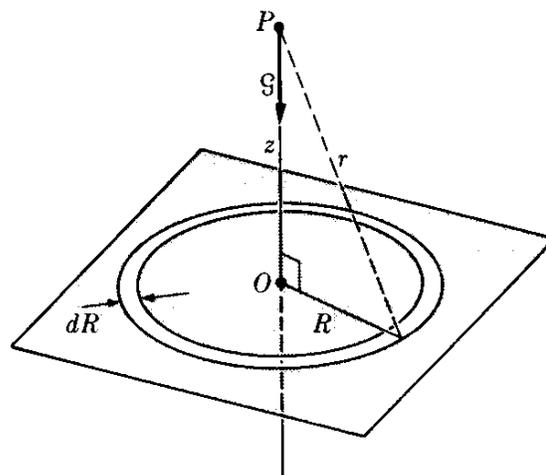


Fig. 13-20. Campo gravitacional de un plano.

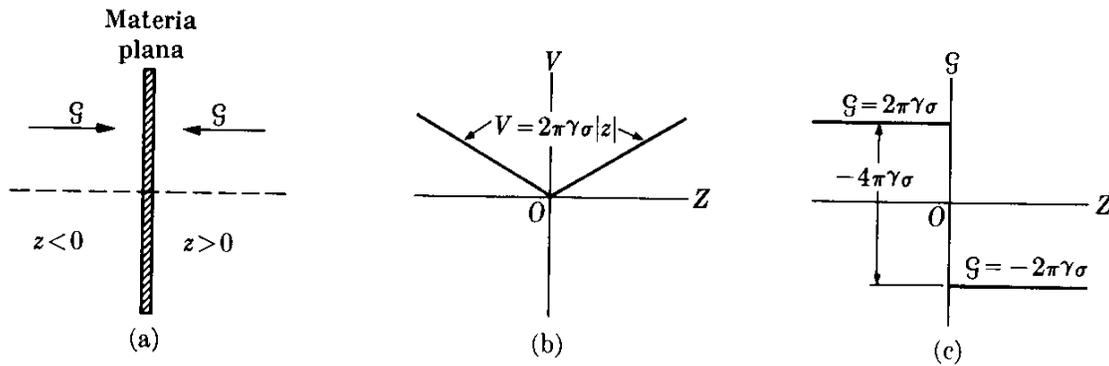


Fig. 13-21. Variación de  $G$  y  $V$  para materia situada en un plano.

independiente de la posición del punto. Decimos entonces que el campo es *uniforme*. En realidad las expresiones que hemos derivado para  $V$  y  $G$  son válidas solamente para  $z > 0$ . Pero la simetría del problema indica que el campo para  $z < 0$  debe ser la imagen de los resultados para  $z > 0$ . Así, para  $z < 0$ , debemos escribir  $V = -2\pi\gamma\sigma z$  y  $G = +2\pi\gamma\sigma$ . Estos resultados son perfectamente compatibles con nuestro cálculo, debido a que la expresión que hemos usado para calcular  $V$  depende de  $z^2$  y, al escribir la solución, deberíamos haberla expresado en la forma  $V = 2\pi\gamma\sigma|z|$ , que es válida para  $z \leq 0$ .

El potencial y el campo en ambos lados del plano se han ilustrado en la Fig. 13-21. Podemos notar que, al pasar de izquierda a derecha a través del plano, el potencial no cambia de valor (pero cambia de pendiente en forma discontinua) y el campo sufre un cambio súbito de  $-4\pi\gamma\sigma$ . Puede demostrarse que éste es un resultado general válido para cualquier distribución superficial de materia, independientemente de su forma.

### 13.7 El campo gravitacional debido a un cuerpo esférico

Todas las fórmulas expuestas en este capítulo son estrictamente válidas solamente para masas puntuales. Cuando las aplicamos al movimiento de los planetas alrededor del sol, fue bajo la suposición de que sus tamaños son pequeños comparados con su separación. Si tomamos sus tamaños finitos en consideración, esto puede introducir algún factor geométrico en la ec. (13.1). Similarmente, cuando relacionamos la aceleración de la gravedad  $g$  a la masa y el radio de la tierra en el ejemplo 13.1, usamos la ec. (13.1), a pesar del hecho que el razonamiento anterior relativamente pequeño no se aplica en este caso. Newton mismo se preocupó por este problema geométrico, y demoró la publicación de su ley de gravitación universal por unos 20 años hasta que encontró la explicación correcta. En esta sección vamos a computar el campo gravitacional producido por un cuerpo esférico. Comenzaremos calculando el campo gravitacional de una capa esférica; esto es, de una masa uniformemente distribuida sobre la superficie de una esfera cuyo interior está vacío.

Llamemos  $a$  el radio de la esfera y  $r$  la distancia de un punto arbitrario  $P$  al centro  $C$  de ella. Estamos interesados en obtener la intensidad del campo gravitacional en  $P$ . Consideraremos primero el caso cuando  $P$  se encuentra fuera de la esfera (Fig. 13-22). Podemos dividir la superficie de la esfera en zonas circulares

estrechas, todas con centros en la línea  $AB$ . El radio de cada zona es  $a \operatorname{sen} \theta$  y el ancho es  $a d\theta$ . Luego el área de la zona es

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \text{longitud} \times \text{ancho} = \\ &= (2\pi a \operatorname{sen} \theta) (a d\theta) = \\ &= 2\pi a^2 \operatorname{sen} \theta d\theta. \end{aligned}$$

Si  $m$  es la masa total distribuida uniformemente sobre la superficie de la esfera, la masa por unidad de área es  $m/4\pi a^2$  y la masa de la zona circular es

$$\frac{m}{4\pi a^2} (2\pi a^2 \operatorname{sen} \theta d\theta) = \frac{1}{2} m \operatorname{sen} \theta d\theta.$$

Todos los puntos de la zona se encuentran a la misma distancia  $R$  de  $P$ . Por consiguiente aplicando la ec. (13.19), encontramos que el potencial producido por la zona en  $P$  es

$$dV = - \frac{\gamma(\frac{1}{2} m \operatorname{sen} \theta d\theta)}{R} = - \frac{\gamma m}{2R} \operatorname{sen} \theta d\theta.$$

De la Fig. 13-22, usando la ley de los cosenos, ec. (M.16), notamos que

$$R^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta.$$

Diferenciando, teniendo en cuenta que  $a$  y  $r$  son constantes, obtenemos

$$2R dR = 2ar \operatorname{sen} \theta d\theta \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen} \theta d\theta = \frac{R dR}{ar}.$$

Sustituyendo en la expresión de  $dV$ , se obtiene

$$dV = - \frac{\gamma m}{2ar} dR. \quad (13.22)$$

Para obtener el potencial gravitacional total debemos integrar sobre toda la superficie de la esfera. Los límites de  $R$ , cuando el punto  $P$  se encuentra fuera de la esfera, son  $r + a$  y  $r - a$ . Por consiguiente

$$V = - \frac{\gamma m}{2ar} \int_{r-a}^{r+a} dR = - \frac{\gamma m}{2ar} (2a) = - \frac{\gamma m}{r}, \quad r > a, \quad (13.23)$$

es el potencial en un punto exterior a una capa esférica homogénea. Si el punto  $P$  se encuentra dentro de la esfera (Fig. 13-23), los límites de  $R$  son  $a + r$  y  $a - r$ , resultando

$$V = - \frac{\gamma m}{2ar} \int_{a-r}^{a+r} dR = - \frac{\gamma m}{2ar} (2r) = - \frac{\gamma m}{a}, \quad r < a, \quad (13.24)$$

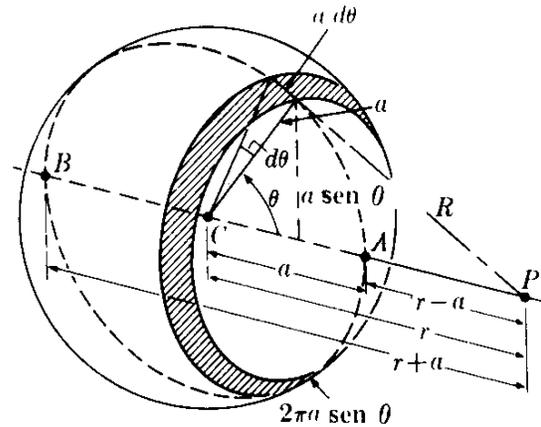


Fig. 13-22. Cálculo del campo gravitacional en un punto externo a una masa distribuida uniformemente sobre una capa esférica.

que da un potencial gravitacional que es constante, independiente de la posición de  $P$ .

Aplicando la ec. (13.21), encontramos que el campo gravitacional en puntos fuera de la capa esférica homogénea es

$$\mathcal{G} = -\frac{\gamma m}{r^2} \mathbf{u}_r, \quad r > a, \quad (13.25)$$

y en puntos en el interior de la capa esférica es

$$\mathcal{G} = 0, \quad r < a. \quad (13.26)$$

Comparando las ec. (13.23) y (13.25) con las ec. (13.18) y (13.15), llegamos a la siguiente conclusión: *El campo gravitacional y el potencial para puntos exteriores a una masa uniformemente distribuida sobre una capa esférica es idéntica al campo gravitacional y al potencial de una partícula de la misma masa situada en el centro de la esfera. En todos los puntos interiores a la capa esférica el campo es cero y el potencial es constante.*

La Fig. 13-24 muestra la variación de  $\mathcal{G}$  y  $V$  con la distancia del centro de la esfera. Puede verse que al desplazarse del centro hacia el infinito, el potencial en la capa esférica no cambia de valor (pero la pendiente cambia en forma discontinua). El campo, sin embargo, sufre un cambio súbito de  $-\gamma m/a^2$ . Recordando que, si  $\sigma$  es la densidad superficial de la capa,  $m = 4\pi a^2\sigma$ , vemos que el cambio súbito en el campo es de  $-4\pi\gamma\sigma$ . Obtenemos así los mismos resultados que para el plano en el ejemplo 13.8.

Supongamos ahora que la masa se encuentra uniformemente distribuida en todo el volumen de la esfera, esto es, la esfera es sólida. Podemos entonces considerar que la esfera esté construida como una cebolla, es decir, como la superposición de una serie de capas esféricas delgadas. Cada capa produce un campo dado por las ec. (13.25) ó (13.26). Para un punto exterior a la esfera (Fig. 13-25),

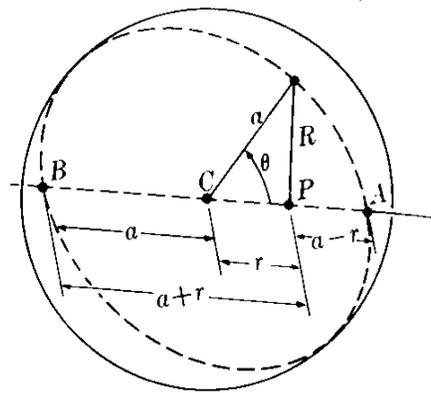


Fig. 13-25. Cálculo del campo gravitacional en un punto interior a una masa uniformemente distribuida sobre una capa esférica.

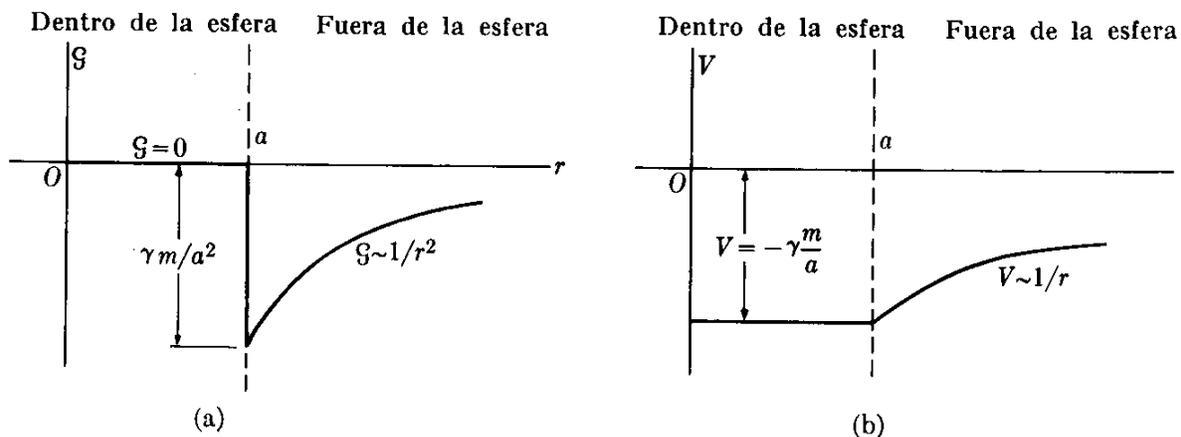
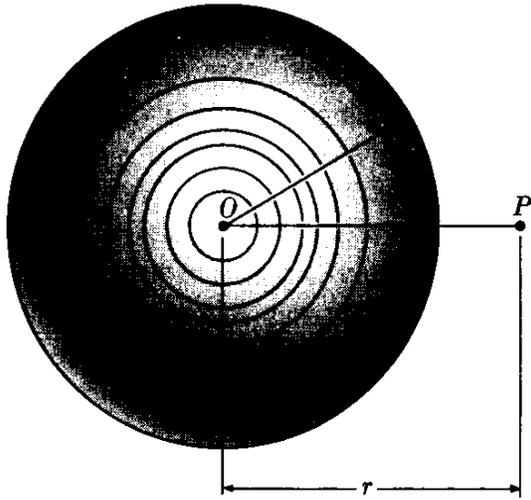
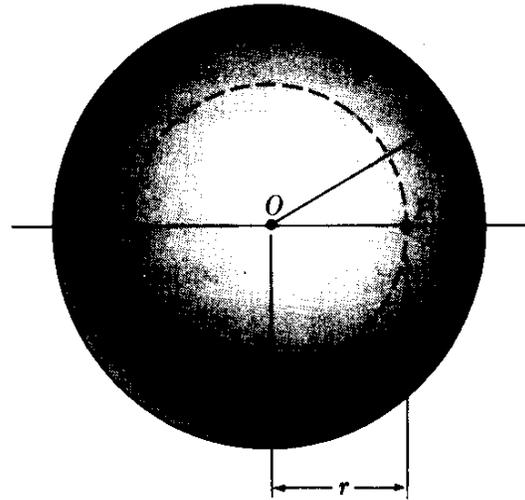


Fig. 13-24. Variación de  $\mathcal{G}$  y de  $V$ , en función de la distancia al centro, para una masa uniformemente distribuida sobre una capa esférica.

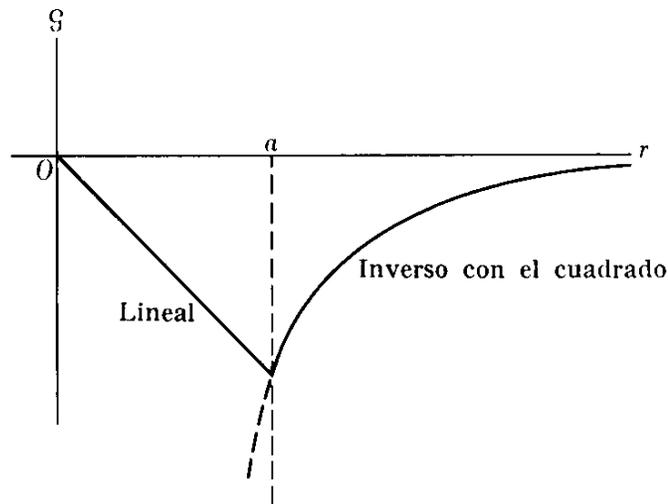


**Fig. 13-25.** Cálculo del campo gravitacional en un punto exterior a una esfera sólida.



**Fig. 13-26.** Cálculo del campo gravitacional en un punto interior a una esfera sólida.

como la distancia  $r$  del centro a  $P$  es la misma para todas las capas, las masas se suman dando nuevamente el resultado (13.25). Por consiguiente *una esfera sólida homogénea produce, en puntos externos a ella, un campo gravitacional y un potencial idénticos a aquellos de una partícula de la misma masa situada en el centro de la esfera.\**



**Fig. 13-27.** Variación de  $\mathcal{G}$  para una esfera homogénea sólida en función de la distancia al centro.

Para obtener el campo en el interior de una esfera homogénea, consideremos un punto  $P$  situado a una distancia  $r$  del centro, con  $r < a$ . Dibujamos una esfera de radio  $r$  (Fig. 13.26) y observamos que aquellas capas con radios ma-

\* Este resultado se cumple aun cuando la esfera en lugar de ser homogénea, tenga su masa distribuida con simetría esférica; esto es, cuando su densidad es una función de la distancia al centro solamente. Pero no se cumple si la masa está distribuida de manera que dependa de la dirección.

tores que  $r$  no contribuyen al campo en  $P$ , de acuerdo a la ec. (13.26), ya que  $P$  es interior a ellas, el campo resultante de todas las capas con radios menores que  $r$  produce un campo similar al de la ec. (13.25). Llamemos  $m'$  la masa dentro de la esfera punteada. Por la ec. (13.25), el campo en  $P$  será

$$\mathcal{G} = -\frac{\gamma m'}{r^2} \mathbf{u}_r. \quad (13.27)$$

El volumen de la esfera total es  $\frac{4}{3}\pi a^3$  y, como la esfera es homogénea, la masa por unidad de volumen es  $m/\frac{4}{3}\pi a^3$ . La masa  $m'$  contenida en la esfera de radio  $r$  es entonces

$$m' = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi a^3} \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{mr^3}{a^3}.$$

Sustituyendo este resultado en la ec. (13.27), obtenemos finalmente para el campo en un punto interior a la esfera homogénea

$$\mathcal{G} = -\frac{\gamma m r}{a^3} \mathbf{u}_r. \quad (13.28)$$

Por consiguiente, el campo gravitacional en un punto interior a la esfera homogénea es proporcional a la distancia  $r$  del centro. La razón por la cual el campo aumenta dentro de la esfera cuando el punto se aleja del centro es debida a que la disminución por la ley inversa del cuadrado es sobrecompensada por el aumento en masa, que es proporcional al cubo de la distancia. La Fig. 13-27 muestra la variación de  $\mathcal{G}$  en función de  $r$  para una esfera sólida homogénea. Esta figura da, por ejemplo, la variación que el peso de un cuerpo tendría cuando se le desplaza desde el centro de la tierra a un punto a gran distancia de él, si la tierra fuera homogénea.

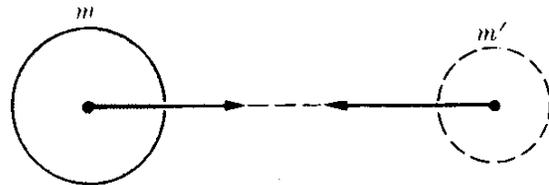
Dejaremos que el estudiante verifique que el potencial gravitacional en un punto exterior a una esfera homogénea está dado aún por la ec. (13.23), pero en un punto dentro de la esfera, el potencial gravitacional es

$$V = \frac{\gamma m}{2a^3} (r^2 - 3a^2), \quad r < a.$$

Nótese que en el problema esférico que hemos considerado en esta sección, el campo gravitacional en un punto depende solamente de la distancia del punto al centro pero no de la dirección de la línea que une al centro con el punto. Este resultado era de esperar por la simetría del problema. Si fuéramos a considerar, en lugar de una esfera homogénea, un cuerpo con diferente geometría o simetría, o una esfera no homogénea (con la masa distribuida sin simetría esférica), es de suponer que los ángulos aparezcan en la ecuación. Pero para problemas de simetría esférica las propiedades dependen solamente de la distancia al centro. La aplicación de consideraciones de simetría simplifica la solución de muchos problemas de física.

Nos encontramos ahora en condiciones de verificar que la ec. (13.1) de la atracción gravitatoria entre dos masas puntuales se aplica también para dos cuerpos esféricos homogéneos. Supongamos que colocamos una masa puntual  $m'$  a una distancia  $r$  del centro de una masa esférica  $m$  (Fig. 13.28). El campo que experimenta es  $\mathcal{G} = \gamma m/r^2$ , y la fuerza sobre  $m'$  es  $m'\mathcal{G} = \gamma mm'/r^2$ . Por la ley de acción y reacción,  $m'$  ejerce una fuerza igual y opuesta sobre  $m$ . Esta fuerza se considera que se debe al campo creado por  $m'$  en la región ocupada por  $m$ . Ahora, si reemplazamos  $m'$  por un cuerpo homogéneo esférico de la misma masa, el campo alrededor de  $m$  no cambia, debido al teorema que hemos demostrado y, por consiguiente, la fuerza sobre  $m$  es la misma. Nuevamente invocamos el principio de acción y reacción y llegamos a la conclusión de que la fuerza sobre la masa esférica  $m'$  es aún la misma. En consecuencia, dos masas esféricas homogéneas se atraen entre sí de acuerdo a la ley (13.1), donde  $r$  es la distancia entre sus centros. Si las masas no son ni esféricas ni homogéneas aparecerá en la expresión de su interacción algún factor geométrico, incluyendo los ángulos que definen su orientación relativa.

Fig. 13-28. La interacción gravitacional entre dos cuerpos esféricos homogéneos depende solamente de la distancia entre sus centros.



**EJEMPLO 13.9.** Discutir la variación de la aceleración de la gravedad que tiene lugar cuando uno se desplaza una pequeña distancia hacia arriba o hacia abajo de la superficie de la tierra.

**Solución:** Llamemos  $h$  la altura del cuerpo sobre la superficie terrestre. Su distancia al centro es  $r = R + h$ . La intensidad del campo gravitacional, de acuerdo a la ec. (13.25) es

$$\mathcal{G} = \frac{\gamma M}{(R + h)^2},$$

donde la masa  $m$  ha sido reemplazada por la masa  $M$  de la tierra. Considerando que  $h$  es pequeña comparada con  $R$  y usando la aproximación binomial (M.28) y el resultado del ejemplo 13.1, tenemos

$$\mathcal{G} = \frac{\gamma M}{R^2(1 + h/R)^2} = g \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2} \approx g \left(1 - \frac{2h}{R}\right).$$

Introduciendo los valores de  $g$  y  $R$ , obtenemos

$$\mathcal{G} = 9,81 - 3,06 \times 10^{-6}h \text{ m s}^{-2}.$$

Esta expresión da, aproximadamente, la variación en la aceleración de la gravedad y en el peso de un cuerpo, cuando uno se desplaza hacia *arriba* una pequeña distancia  $h$  sobre la superficie de la tierra.

Si por el contrario nos desplazamos hacia el interior de la tierra una distancia  $h$ , tenemos  $r = R - h$ . Usando la ec. (13.28), con  $m$  reemplazada por  $M$  y  $a$  por  $R$ , obtenemos

$$\mathcal{G} = \frac{\gamma M(R - h)}{R^2} = \frac{\gamma M}{R^2} \left(1 - \frac{h}{R}\right) = g \left(1 - \frac{h}{R}\right),$$

o, introduciendo los valores apropiados

$$\mathcal{G} = 9,81 - 1,53 \times 10^{-6}h \text{ m s}^{-2}.$$

En ambos casos la gravedad disminuye, pero lo hace más rápidamente para puntos situados sobre la superficie que para puntos por debajo (Recordar la Fig. 13-27).

### 13.8 Principio de equivalencia

El hecho de que las masas inercial y gravitacional sean las mismas para todos los cuerpos da lugar a un resultado importante:

*Todos los cuerpos situados en el mismo lugar en un campo gravitacional experimentan la misma aceleración.*

Un ejemplo de este hecho es el descubrimiento de Galileo de que todos los cuerpos caen a la tierra con la misma aceleración. Este descubrimiento, como ya hemos mencionado, es a su vez una prueba indirecta de la identidad de las masas inercial y gravitacional.

Para demostrar la proposición anterior notamos que en un lugar donde el campo gravitacional es  $\mathcal{G}$ , la fuerza sobre un cuerpo de masa  $m$  es  $\mathbf{F} = m\mathcal{G}$ , y su aceleración es

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \mathcal{G},$$

la cual es independiente de la masa  $m$  del cuerpo sometido a la acción del campo gravitacional. Nótese que la aceleración es igual a la intensidad del campo, lo cual es consistente con nuestro resultado previo de que el campo gravitacional se mide en  $\text{m s}^{-2}$ .

Si el laboratorio de un experimentador se coloca en un campo gravitacional, él observará que todos los cuerpos con los cuales experimenta, y que no están sometidos a otras fuerzas, experimentan una aceleración común. El experimentador, al observar esta aceleración común, puede llegar a la conclusión de que su laboratorio se encuentra en un campo gravitacional.

Sin embargo, esta conclusión no es la única explicación posible de la observación de una aceleración común. En la sección 6.2, cuando discutimos el movimiento relativo, indicamos que cuando un observador en movimiento tiene una aceleración  $\mathbf{a}_0$  con respecto a un observador inercial y  $\mathbf{a}$  es la aceleración de un cuerpo medida por el observador inercial, la aceleración medida por el observador en movimiento se expresa por:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0.$$

Si el cuerpo está libre, la aceleración  $\mathbf{a}$  medida por el observador inercial es cero. Por consiguiente, la aceleración medida por el observador acelerado es  $\mathbf{a}' = -\mathbf{a}_0$ . Así todos los objetos libres parecen tener para el observador acelerado una acele-

ración común  $-\mathbf{a}_0$ , una situación idéntica a aquella encontrada en un campo gravitacional de intensidad  $\mathcal{G} = -\mathbf{a}_0$ . Podemos, de este modo, llegar a la conclusión de que

*un observador no tiene medios como distinguir si su laboratorio se encuentra en un campo gravitacional uniforme o en un sistema de referencia acelerado.*

Esta proposición es conocida como el *principio de equivalencia*, ya que muestra una equivalencia, en lo que se refiere a la descripción del movimiento, entre un campo gravitacional y un sistema de referencia acelerado. La gravitación y la inercia parecen no ser dos propiedades diferentes de la materia, sino sólo dos aspectos diferentes de una característica fundamental y universal de toda la materia.

Supongamos, por ejemplo, que un observador tiene un laboratorio en un tren que se mueve sobre rieles horizontales con velocidad constante, y que las ventanas están cubiertas de modo que el observador no tiene acceso al mundo exterior. El observador experimenta con algunas bolas de billar dejándolas caer, y nota que todas caen con la misma aceleración. Puede llegar entonces a la conclusión que está rodeado por un campo gravitacional vertical en dirección hacia abajo, lo cual es la interpretación normal. Pero igualmente podría suponer que lo que sucede es que su tren está siendo elevado con una aceleración vertical, igual y opuesta a la de las bolas, y que las bolas están libres y no están sometidas a ningún campo gravitacional.

Supongamos ahora que el observador coloca bolas sobre una tabla de billar situada en el tren. Cuando el observador nota que las bolas ruedan sobre la mesa hacia la parte posterior del tren con una aceleración común, él puede llegar a la conclusión que sobre su laboratorio actúa un nuevo campo gravitacional horizontal dirigido hacia la parte posterior del tren o que su laboratorio es acelerado hacia adelante horizontalmente. La segunda suposición es la usual, asociada con una decisión del maquinista de acelerar el tren. Sin embargo el tren podría en su lugar ir subiendo una cuesta, lo cual es equivalente a producir un campo gravitacional paralelo al piso del tren, con el mismo resultado en el movimiento de las bolas de billar.

Debido al principio de equivalencia,

*las leyes de la naturaleza deben ser expresadas de modo que sea imposible distinguir entre un campo gravitacional uniforme y un sistema de referencia acelerado,*

una proposición que constituye la base del *principio general de la relatividad* enunciado por Einstein en 1915. Este principio requiere que las leyes de la física se escriban en una forma independiente del estado de movimiento del sistema de referencia. Como podemos ver la idea fundamental del principio general de la relatividad es muy simple. Sin embargo, su formulación matemática es algo compleja, y no la discutiremos.

Examinemos ahora el caso de un observador acelerado en un campo gravitacional  $\mathcal{G}$ . La aceleración de cuerpos sometidos solamente al campo gravitacional

medido por nuestro observador se expresa por  $\mathbf{a}' = \mathcal{G} - \mathbf{a}_0$ . Como una ilustración concreta, consideremos el caso de un cohete acelerado hacia arriba desde la tierra. Tenemos entonces que  $\mathcal{G} = \mathbf{g}$ . Escribamos  $\mathbf{a}_0 = -n\mathbf{g}$  para la aceleración del cohete con respecto a tierra, donde  $n$  da el valor de  $\mathbf{a}_0$  con respecto a  $\mathbf{a}$ . (El signo menos es debido al hecho de que el cohete está acelerado en la dirección hacia arriba.) Entonces  $\mathbf{a}' = (n + 1)\mathbf{g}$  es la aceleración, respecto al cohete, de un cuerpo libre dentro del cohete. Por ejemplo, en un cohete acelerado hacia arriba con una aceleración cuatro veces la de la gravedad ( $n = 4$ ), el peso de todos los cuerpos es cinco veces su peso normal. Este aumento aparente en el peso es particularmente importante en la etapa del lanzamiento cuando la aceleración del cohete adquiere el mayor valor.

Consideremos ahora, como otro ejemplo, un satélite en órbita. Aquí  $\mathbf{a}_0 = \mathcal{G}$ , debido a que el satélite se está moviendo bajo la acción del campo gravitacional de la tierra. En este caso  $\mathbf{a}' = 0$ , y todos los cuerpos dentro del satélite parecen no tener peso, ya que su aceleración con respecto al satélite es cero. Esto es solamente una ingravidez relativa ya que tanto el satélite como su contenido se están moviendo en el mismo campo gravitacional y tienen la misma aceleración. Respecto al satélite, los cuerpos en su interior aparecen como cuerpos libres a menos que otras fuerzas actúen sobre ellos; pero, respecto a un observador terrestre ellos están acelerados y sometidos al campo gravitacional.

Un hombre en el interior de un ascensor que cae con la aceleración de la gravedad (debido quizás a un cable roto) experimentaría la misma ingravidez con respecto al ascensor. En tal caso (como en el del satélite),  $\mathbf{a}_0 = \mathbf{g}$ , y nuevamente  $\mathbf{a}' = 0$ . La ingravidez, insistimos, no significa que la fuerza gravitacional haya dejado de actuar. Significa que sobre todos los cuerpos, incluyendo el que nos sirve como sistema de referencia, actúa un mismo campo, que produce una aceleración común, y por lo tanto no hay aceleraciones relativas a menos que otras fuerzas actúen sobre los cuerpos. En otras palabras, un campo gravitacional puede "desaparecer" si el observador se desplaza a través de él con una aceleración  $\mathbf{a}_0 = \mathcal{G}$  respecto a un sistema inercial.

### 13.9 *La gravitación y las fuerzas intermoleculares*

En las secciones previas de este capítulo hemos visto cómo las fuerzas gravitacionales describen adecuadamente el movimiento planetario y el movimiento de los cuerpos cerca de la superficie de la tierra. Es interesante saber ahora si podemos demostrar que la misma clase de interacción es responsable de que las moléculas se conserven juntas en un pedazo de materia o de que los átomos estén juntos en una molécula.

Consideremos una molécula simple tal como la molécula de hidrógeno, compuesta de dos átomos de hidrógeno separados la distancia  $r = 0,745 \times 10^{-10}$  m. La masa de cada átomo de hidrógeno es  $m = 1,673 \times 10^{-27}$  kg. Por consiguiente, la interacción gravitacional, de los dos átomos corresponde a una energía potencial

$$E_p = -\frac{\gamma mm'}{r} = 2,22 \times 10^{-54} \text{ J} = 1,39 \times 10^{-35} \text{ eV.}$$

Sin embargo, el valor experimental de la energía de disociación de una molécula de hidrógeno es de  $7,18 \times 10^{-19}$  J ( $= 4,48$  eV), ó  $10^{35}$  veces mayor que la energía gravitacional. Por consiguiente, llegamos a la conclusión de que la interacción gravitacional *no puede* ser responsable de la formación de una molécula de hidrógeno. Resultados similares se obtienen para moléculas más complejas.

En el caso de un líquido, la energía necesaria para vaporizar un mol de agua (18 g ó  $6,23 \times 10^{23}$  moléculas) es  $4,06 \times 10^3$  J, correspondiente a una energía de separación por molécula del orden de  $6 \times 10^{-21}$  J. La separación promedio de las moléculas de agua es del orden de  $3 \times 10^{-10}$  m, y la masa de una molécula es  $3 \times 10^{-26}$  kg correspondiente a una energía potencial gravitacional de  $2 \times 10^{-52}$  J, nuevamente demasiado pequeño para explicar la existencia del líquido.

Por lo tanto, llegamos a la conclusión de que las fuerzas que dan lugar a la asociación de átomos para formar moléculas, o de moléculas para formar materia no pueden ser gravitacionales. En los siguientes cuatro capítulos, que aparecen en el volumen II, discutiremos otras fuerzas que parecen ser responsables de estas asociaciones: *las interacciones electromagnéticas*.

Sin embargo, la interacción gravitacional, siendo un efecto de masa, es muy importante en la presencia de cuerpos masivos que son eléctricamente neutros, tales como los planetas, y por dicha razón la gravitación es la fuerza más intensa que sentimos en la superficie de la tierra, a pesar del hecho que es la más débil de todas las fuerzas conocidas en la naturaleza. Es responsable de un gran número de fenómenos comunes que afectan nuestras vidas diarias. Las mareas, por ejemplo, se deben enteramente a la interacción gravitacional de la luna y el sol con la tierra.

## Bibliografía

1. "The Homocentric Spheres of Eudoxus", H. Swenson ; *Am. J. Phys.* **31**, 456 (1963)
2. "The Celestial Palace of Tycho Brahe", J. Christianson ; *Sci. Am.*, febrero de 1961, pág. 118
3. "Johannes Kepler's Universe : Its Physics and Metaphysics", G. Holton ; *Am. J. Phys.* **24**, 340 (1956)
4. "Newton and the Cause of Gravity", M. Evans ; *Am. J. Phys.* **26**, 619 (1958)
5. "Gravity", G. Gamow ; *Sci. Am.*, marzo de 1961, pág. 94
6. "The Eötvös Experiment", R. Dicke ; *Sci. Am.*, diciembre de 1961, pág. 84
7. "Gravitational and Inertial Mass", G. B. Bronson ; *Am. J. Phys.* **28**, 475 (1960)
8. "Guidelines to Antigravity", R. Forward ; *Am. J. Phys.* **31**, 166 (1963)
9. *Mechanics* (segunda edición), por K. Symon. Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1964, cap. 6
10. *Introduction to Engineering Mechanics*, por J. Huddleston. Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1961, sec. 6.8
11. *Vector Mechanics*, por D. Christie. New York : McGraw-Hill, 1964, cap. 17

12. *The Feynman Lectures on Physics*, vol. I por R. Feynman, R. Leighton y M. Sands. Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1963, cap. 7
13. *Source Book in Physics*, por W. F. Magie. Cambridge, Mass. : Harvard University Press, 1963 ; pág. 92, Newton ; pág. 105, Cavendish

### Problemas

- 13.1 Calcular la fuerza de atracción gravitacional entre la tierra y (a) la luna, (b) el sol. Obtener la relación entre estas dos fuerzas.
- 13.2 Calcular la atracción gravitacional entre los dos protones de una molécula de hidrógeno. Su separación es de  $0,74 \times 10^{-10}$  m.
- 13.3 Determinar la fuerza de atracción gravitacional entre el protón y el electrón en un átomo de hidrógeno, suponiendo que el electrón describe una órbita circular de  $0,53 \times 10^{-10}$  m de radio.
- 13.4 Estimar la distancia promedio entre dos átomos de helio en un mol a presión y temperatura normales. A partir de esta distancia, obtener la atracción gravitacional entre dos átomos de helio vecinos. La masa de un átomo de helio puede considerarse como de 4,0 uma.
- 13.5 Estimar la distancia promedio entre dos moléculas de agua en la fase líquida. A partir de esta distancia, obtener la atracción gravitacional entre dos moléculas vecinas de agua. Una molécula de agua está compuesta de un átomo de oxígeno y dos átomos de hidrógeno.
- 13.6 Dos bolas de hierro, cada una con una masa de 10 kg están en contacto. Encontrar su atracción gravitatoria. Compararla con la atracción gravitacional de la tierra sobre cada bola. Si uno trata de separar las dos bolas, se "sentirá" la atracción que ejercen entre sí? [*Sugerencia*: Ud. puede necesitar la densidad del hierro. Consultar la tabla 2-2.]
- 13.7 Comparar la atracción gravitacional producida (a) por la luna, y (b) por el sol sobre un cuerpo de masa  $m$  situado en la superficie de la tierra, con la atracción de la tierra sobre el mismo cuerpo. ¿Qué conclusión obtiene Ud. acerca de la posibilidad de observar un cambio en el peso del cuerpo durante la rotación diaria de la tierra?
- 13.8 Una esfera de 5,0 kg de masa está situada en uno de los lados de una balanza de brazos iguales en equilibrio. Una masa esférica mayor ( $5,8 \times 10^3$  kg) se rueda hasta que se encuentre directamente debajo de la primera masa, siendo la distancia entre sus centros de 0,50 m. ¿Qué masa debe colocarse en el otro platillo para restaurar el equilibrio en el sistema? Suponer que  $g = 9,80$  m s<sup>-2</sup>. Este método fue utilizado por G. von Jolly, el siglo pasado, para determinar el valor de  $\gamma$ .
- 13.9 Un hombre pesa 70 kgf. Suponiendo que el radio de la tierra se duplicara, cuánto pesaría (a) si la masa de la tierra permaneciera constante, (b) si la densidad promedio de la tierra permaneciera constante.
- 13.10 Calcular la aceleración de la gravedad en la superficie del sol. Su radio es 110 veces el radio de la tierra y su masa es 330.000 veces la masa de la tierra. Repetir el cálculo para Venus, Júpiter y la luna.
- 13.11 Un hombre pesa 110 kgf. Calcular cuánto pesaría en la superficie del sol y en la superficie de la luna. ¿Cuál sería su masa en ambos lugares?
- 13.12 Un hombre pesa 80 kgf en el nivel del mar. Calcular su masa y peso a 8000 m sobre el nivel del mar.
- 13.13 De los datos de la tabla 13-1 sobre los radios y períodos del movimiento orbital de los planetas, calcular la masa del sol. Usar solamente tres planetas (Venus, la Tierra y Júpiter).
- 13.14 En un experimento de Cavendish (Fig. 13-3), las dos masas pequeñas son iguales a 10,0 gm y la varilla (de

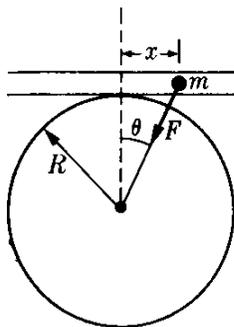


Figura 13-29

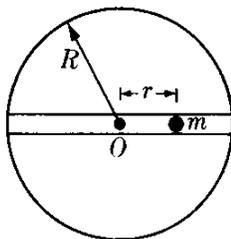


Figura 13-80

masa despreciable) tiene 0,50 m de largo. El período de oscilación torsional de este sistema es de 770 s. Las dos masas grandes tienen 10,0 kg cada una y están colocadas de manera que la distancia entre los centros de las esferas grande y pequeña sea de 0,10 m. Encontrar la deflexión angular de la varilla.

13.15 ¿A qué altura debe uno elevarse sobre la superficie de la tierra para que la aceleración de la gravedad cambie en 1 %? ¿A qué profundidad de la tierra debe penetrarse para que se observe el mismo cambio?

13.16 Encontrar la altura y la velocidad de un satélite (en órbita circular en el plano ecuatorial) que permanece sobre el mismo punto de la tierra todo el tiempo.

13.17 Un satélite artificial se desplaza en una órbita circular a una altura de 300 km sobre la superficie de la tierra. Encontrar (a) su velocidad, (b) su período de revolución, y (c) su aceleración centrípeta.

13.18 Comparar el resultado de parte (c) del problema anterior con el valor de  $g$  a dicha altura, calculada directamente por el método del ejemplo 13.9.

13.19 ¿Cuál sería el período de un satélite que gira alrededor de la tierra en una órbita cuyo radio es un cuarto del radio de la órbita lunar? El período de la luna es de cerca de 28 días. ¿Cuál sería la relación de la velocidad del satélite y la de la luna?

13.20 Una partícula de masa  $m$  puede moverse en una tubería horizontal sin fricción (Fig. 13-29) bajo la acción de la

atracción gravitacional de la tierra. Suponiendo que  $x$  es muy pequeña comparada con  $R$ , demostrar que la partícula tiene movimiento armónico simple y que su período es de  $P = 2\pi\sqrt{R/g}$ . Encontrar el valor de  $P$ . Este es el período más largo de un péndulo situado en la superficie de la tierra. ¿Puede demostrarlo?

13.21 Suponer que se hiciera un túnel a través de la tierra a lo largo de un diámetro (Fig. 13-30). (a) Demostrar que la fuerza sobre una masa  $m$  situada a una distancia  $r$  del centro de la tierra es  $F = -mgr/R$ , si suponemos que la densidad es uniforme. (b) Demostrar que el movimiento de  $m$  sería armónico simple, con un período alrededor de 90 min. (c) Escribir las ecuaciones de la posición, velocidad, y aceleración en función del tiempo, con valores numéricos para las constantes.

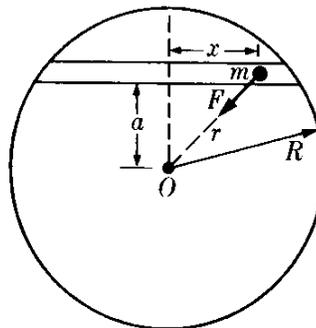


Figura 13-81

13.22 Demostrar que el movimiento sin fricción de una masa situada en un túnel perforado a través de la tierra como se ve en la Fig. 13-31 sería armónico simple. Calcular el período.

13.23 Se deja caer una masa  $m$  desde una altura  $h$  sobre el orificio en la superficie de la tierra en la Fig. 13-32. (a) ¿Con qué velocidad pasará  $m$  por el centro de la tierra? (b) ¿Será el movimiento armónico simple? (c) ¿Será un movimiento periódico? Dar razones para sus respuestas.

13.24 De los datos del movimiento del sol en la galaxia (Fig. 7-1), y suponiendo que la galaxia es un agregado esférico de estrellas, calcular su masa total. Supo-

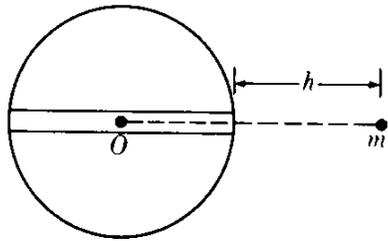


Figura 18-32

niendo que las estrellas tienen, en promedio, la misma masa que el sol ( $1,98 \times 10^{30}$  kg), estimar su número y su separación promedio.

13.25 Escribir una ecuación que exprese algebraicamente la energía total del sistema (a) tierra-luna, (b) sol-tierra-luna.

13.26 Estimar la energía cinética, la energía potencial, y la energía total de la tierra en su movimiento alrededor del sol. (Considerar solamente la energía potencial gravitacional con el sol).

13.27 Obtener la expresión para la energía total de una órbita circular bajo fuerzas gravitacionales (ec. 13.6) usando el teorema virial (sección 8.13).

13.28 Uno de los cohetes "Pioneer" a la luna alcanzó una altura aproximada de 125.000 km. Despreciando el efecto de la luna, estimar la velocidad con la que este cohete llegaría a la atmósfera de la tierra en su regreso. Suponer que el cohete fue disparado en línea recta hacia arriba y que la atmósfera llega hasta 130 km sobre la superficie de la tierra.

13.29 Suponiendo que  $h$  es la distancia de un cuerpo sobre la superficie de la tierra, tenemos que  $r = R + h$ . Verificar utilizando la expansión binomial (M.21), que cuando  $h$  es muy pequeña comparada con  $R$ , la ec. (13.10) se reduce a  $v^2 = 2gh$ .

13.30 Calcular la velocidad de escape en Mercurio, Venus, Marte y Júpiter. [Sugerencia: Para simplificar el cálculo, evaluar primero el factor  $\sqrt{2\gamma}$ . Luego, multiplicar por  $\sqrt{M/R}$  para cada planeta.]

13.31 (a) Computar la velocidad de escape para una partícula, desde el sistema solar, que se encuentra a una misma

distancia del sol y de la tierra. (b) Usar este resultado para obtener la velocidad mínima de escape de un cuerpo lanzado desde la tierra, teniendo en cuenta la velocidad de la tierra pero no su campo gravitacional.

13.32 Una partícula se encuentra en reposo en la superficie terrestre. (a) Calcular su energía cinética y su energía potencial con respecto al sol, incluyendo la atracción gravitacional de la tierra y el sol. (b) Obtener la velocidad de escape del sistema solar. Compararla con la del problema 13.31.

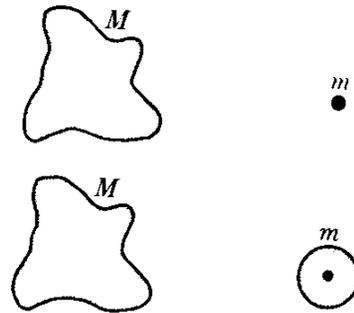


Figura 18-33

13.33 Usando los resultados de la sección 13.7 demostrar que la interacción gravitacional entre una masa  $M$  (Fig. 13-33) de forma arbitraria y una masa puntual o entre  $M$  y un cuerpo esférico homogéneo de la misma masa  $m$  es la misma, siempre que el centro del cuerpo esférico coincida con la posición de la masa puntual.

13.34 Determinar la energía potencial entre el planeta Saturno y sus anillos. Suponer que los anillos tienen una masa de  $3,5 \times 10^{26}$  kg y están concentrados a una distancia promedio de  $1,1 \times 10^8$  m del centro de Saturno.

13.35 Determinar la energía potencial gravitacional interna de 8 cuerpos, cada uno de masa  $m$ , situados en los vértices de un cubo de lado  $a$ . Aplicar el resultado al caso en el cual las masas son del mismo orden de nuestro sol y el lado del cubo es de 1 parsec. (Ver el problema 2.16).

13.36 Demostrar que la energía necesaria para construir un cuerpo esférico

de radio  $R$  añadiendo capas sucesivas de materia como una cebolla, hasta que se obtenga el radio final deseado es,  $E_p = -3\gamma M^2/5R$ .

13.37 Estimar el valor de la energía potencial gravitacional de nuestra galaxia. Suponer que todos los cuerpos que constituyen la galaxia tienen aproximadamente la misma masa que el sol y están separados por una distancia del orden de  $10^{21}$  m. [Sugerencia: Considerar que la galaxia es esférica, y usar el resultado del problema 13.36].

13.38 Usando el teorema virial y los resultados del problema precedente, estimar la energía cinética total de la galaxia (excluyendo la energía interna de las estrellas).

13.39 Un meteorito se encuentra inicialmente en reposo a una distancia del centro de la tierra igual a seis veces el radio de la tierra. Calcular la velocidad que tendría al llegar a la superficie de la tierra.

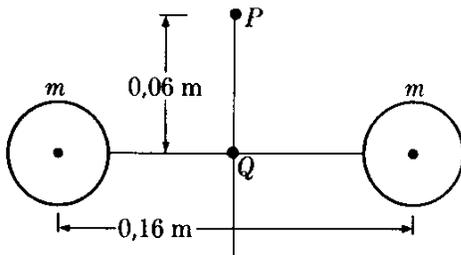


Figura 13-34

13.40 Dos masas iguales de 6,40 kg están separadas por una distancia de 0,16 m (Fig. 13-34). Una tercera masa se suelta en un punto  $P$  equidistante de las dos masas y a una distancia 0,06 m de la línea que las une. Determinar la velocidad de esta tercera masa cuando pasa por  $Q$ . Suponiendo que la masa es de 0,1 kg calcular su aceleración en  $P$  y en  $Q$ .

13.41 Se dispara un cohete verticalmente desde la tierra hacia la luna, consumiéndose el combustible en un tiempo relativamente corto después del disparo. (a) ¿En qué punto de su trayectoria hacia la luna su aceleración vale cero? (b) ¿Cuál sería la velocidad inicial mínima del cohete necesaria para llegar a

este punto y caer en la luna por la acción de la atracción lunar? (c) En este caso, ¿cuál sería la velocidad del cohete al llegar a la luna?

13.42 Demostrar que el tiempo necesario para que un cuerpo caiga desde una distancia  $r$  del centro de la tierra hasta la superficie de la tierra es

$$t = (r^{3/2}/R\sqrt{2g}) [-\sqrt{(R/r)}(1 - R/r) + \text{sen}^{-1}\sqrt{R/r}].$$

Verificar que si  $r$  es muy grande comparada con  $R$ , el resultado es  $t = \frac{1}{2}\sqrt{R/2g}$ . [Sugerencia: Usar la ec. (13.10); suponer que  $v = dr/dt$ , despejar  $dt$  e integrar].

13.43 Un satélite de 5000 kg de masa describe una trayectoria circular de 8000 km de radio alrededor de la tierra. Encontrar su momentum angular y sus energías, cinética, potencial y total.

13.44 Un satélite de 5000 kg describe una órbita circular a una altura de 8000 km sobre la superficie terrestre. Después de varios días, como resultado de la fricción atmosférica, la órbita se reduce a una altura de 650 km. Calcular los cambios en (a) velocidad, (b) velocidad angular, (c) energía cinética, (d) energía potencial, y (e) energía total. Suponer que las órbitas son esencialmente circulares en cada instante debido a que la reducción radial es muy lenta.

13.45 Refiriéndonos al problema previo, suponer que la resistencia del aire puede representarse por medio de una fuerza promedio de 17,5N. (a) Calcular el torque de la fuerza y, usando este resultado, estimar el tiempo necesario para la mencionada reducción de altura. (b) Determinar la disipación de energía por unidad de tiempo, y, a partir de ella, estimar también el tiempo calculado en (a). (c) Usando el período de revolución promedio, obtener el número total de revoluciones en dicho tiempo.

13.46 Adaptar los resultados de la sección 13.5 para tener en cuenta la masa reducida.

13.47 En una estrella doble, una de las estrellas tiene una masa de  $3 \times 10^{33}$  kg y la otra una masa de  $4 \times 10^{33}$  kg. Encontrar su velocidad angular con respecto a su centro de masa suponiendo

que su separación es de  $10^{17}$  m. Encontrar, también, su momentum angular total interno y su energía.

13.48 Usando papel polar, representar gráficamente la ec. (13.12) cuando  $d = 1$  y (a)  $\epsilon = 0,5$ , (b)  $\epsilon = 1$ , (c)  $\epsilon = 2$ . Debido a la simetría de la curva Ud. tiene que calcular  $r$  solamente para  $\theta$  entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$ , y repetir la curva bajo el eje X. Identificar los puntos más importantes de la curva. [Sugerencia: Usar valores de  $\theta$  en múltiplos de  $20^\circ$ ].

13.49 Demostrar que la relación entre la velocidad de un cuerpo en órbita en el *perigeo* (posición más cercana al centro de fuerza) y en el *apogeo* (posición más lejana) es  $(1 + \epsilon)/(1 - \epsilon)$ . [Sugerencia: Nótese que en ambas posiciones la velocidad es perpendicular al radio].

13.50 Un cometa se mueve en una elipse que tiene una excentricidad de  $\epsilon = 0,8$ . Encontrar la relación entre (a) las distancias al sol, (b) las velocidades lineales, y (c) las velocidades angulares en el afelio y en el perihelio.

13.51 En la siguiente tabla se dan la excentricidad  $\epsilon$  y el semieje mayor  $a$  de las órbitas de ciertos planetas. (Recuerde que  $1 \text{ UA} = 1,495 \times 10^{11} \text{ m}$ ).

	Mercurio	la Tierra	Marte
$\epsilon$	0,206	0,017	0,093
$a$ (UA)	0,387	1,000	1,524

Calcular para cada uno de estos planetas: (a) la distancia más cercana al sol, (b) la distancia de mayor alejamiento del sol, (c) la energía total del movimiento de traslación, (d) el momentum angular, (e) el período de revolución, (f) la velocidad en el afelio y en el perihelio.

13.52 Un satélite es puesto en una órbita elíptica a una distancia sobre la superficie terrestre igual al radio de la tierra dándole una velocidad horizontal inicial igual a 1,2 veces la velocidad requerida para que tenga una órbita circular a dicha distancia. Encontrar (a) el momentum angular del satélite,

(b) su energía total, (c) la excentricidad de su órbita, (d) su distancia máxima y mínima de la superficie terrestre, (e) el semieje de su órbita y (f) su período de revolución. (Suponer  $m = 50 \text{ kg}$ ).

13.53 Repetir el problema 13.52, suponiendo que la velocidad inicial del satélite es 0,9 de aquella de un satélite similar en una órbita circular.

13.54 En el vuelo del Geminis V (agosto 21 a agosto 29 de 1965), las alturas de apogeo y perigeo sobre la superficie de la tierra fueron de 352 km y 107 km respectivamente. Determinar la excentricidad de la órbita, las velocidades máxima y mínima de la cápsula, y la variación en el campo gravitacional entre el apogeo y el perigeo.

13.55 Un satélite artificial se mueve en una órbita cuyo perigeo es de 640 km y su apogeo de 4000 km sobre la superficie terrestre. Calcular (a) su semieje mayor, (b) su excentricidad, (c) la ecuación de su órbita, (d) su velocidad en el perigeo y en el apogeo, (e) su período de revolución, (f) su energía total si su masa es de 100 kg, (g) usando papel polar, hacer una gráfica de la trayectoria del satélite.

13.56 El satélite Explorer III de los Estados Unidos, tuvo una órbita elíptica con un perigeo a 109 millas sobre la superficie de la tierra y una velocidad de 27.000 pies/seg en su perigeo. Determinar (a) la excentricidad de su órbita, (b) su semieje mayor, (c) su período de revolución, y (d) su velocidad y altura en el apogeo.

13.57 Un cometa de masa  $m$  se observa a una distancia de  $10^{11} \text{ m}$  del sol

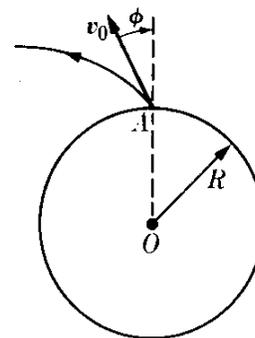


Figura 13-35

vijando hacia él a una velocidad de  $5,16 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$  haciendo un ángulo de  $45^\circ$  con el radio vector del sol. Obtener (a) su energía total y su momentum angular, (b) la ecuación de su órbita, (c) la distancia de mayor cercanía al sol. Observe qué resultado depende de la masa del cometa, y cuál no. Usando papel polar represente gráficamente la trayectoria del cometa.

13.58 Un cohete balístico (Fig. 13-35) de masa  $m$  es disparado desde un punto A con una velocidad inicial  $v_0$ , haciendo un ángulo  $\phi$  con la dirección radial o vertical. Encontrar (a) su momentum angular, (b) su energía cinética, (c) demostrar que la excentricidad de su órbita está dada por

$$\epsilon^2 = 1 + (R^2 v_0^2 \sin^2 \phi / \gamma^2 M^2) (v_0^2 - 2\gamma M/R)$$

[Sugerencia: Para (c) usar el último resultado del ejemplo 13.5].

13.59 Refiriéndonos al problema precedente, demostrar que la ecuación de la trayectoria, es

$$r = R^2 v_0^2 \sin^2 \phi_0 / \gamma M (1 + \epsilon \cos \theta).$$

[Sugerencia: Recordar del ejemplo 13.5 que  $L^2 = \gamma m^2 m' \epsilon d$ .]

13.60 Refiriéndose a los problemas 13.58 y 13.59, suponer que  $v_0 = \sqrt{\gamma M/R}$  y que  $\phi = 30^\circ$ . (a) Determinar la excentricidad del cohete. (b) Escribir la ecuación de su órbita. (c) Demostrar que el proyectil caerá de regreso a la tierra en un punto situado a una distancia  $A$  igual a  $\pi R/3$  medida a lo largo de la superficie terrestre. Usando papel polar, hacer una gráfica de la trayectoria del proyectil. [Sugerencia: Después de calcular  $\epsilon$ , determinar los valores de  $\theta$  para los cuales  $r = R$ . Un valor corresponde al punto de despegue y el otro al punto de retorno. La diferencia entre los dos ángulos da el desplazamiento angular de los dos puntos].

13.61 Refiriéndose al problema 13.60 demostrar que la máxima altura del proyectil sobre la superficie de la tierra es alrededor de  $0,92 R$ . [Se sugiere que el estudiante compare los resultados de los problemas 13.60 y 13.61 con aquéllos

obtenidos usando los métodos de la sección 5.7].

13.62 Refiriéndonos al problema 13.58, demostrar que si la velocidad de lanzamiento del cohete es igual a su velocidad de escape, la trayectoria será una parábola y, de acuerdo al problema 13.59, no importa como sea dirigido el cohete, su trayectoria será abierta y nunca retornará.

13.63 Un cohete balístico es disparado con una velocidad igual a su velocidad de escape, de modo que su trayectoria es una parábola. Encontrar la ecuación de su trayectoria cuando  $\phi = 45^\circ$  y  $\phi = 90^\circ$ . Usando papel polar, hacer un esquema de la trayectoria en cada caso.

13.64 Un cometa a gran distancia del sol tiene una velocidad  $\sqrt{2gR}$  y un parámetro de impacto de  $\sqrt{2} R$  (recordar el ejemplo 7.16), donde  $R$  es el radio del sol. ¿A qué distancia del sol pasará el cometa?

13.65 Una partícula de masa  $m$  se mueve bajo una fuerza central de atracción de magnitud  $k/r^2$ . Su velocidad en una de las posiciones extremas es  $\sqrt{k/2mr_1}$ , donde  $r_1$  es la distancia del centro de fuerza. Calcular la distancia  $r_2$  correspondiente a la otra posición extrema, el semieje mayor de la órbita, y la excentricidad.

13.66 Una partícula se mueve bajo una fuerza central de repulsión de magnitud  $F = k/r^2$ . Si se dispara desde un punto situado a una distancia muy grande del centro de la fuerza con una velocidad  $v_0$  y un parámetro de impacto  $b$  (recordar el ejemplo 7.16). Determinar (a) la ecuación de su trayectoria, (b) la distancia de su mayor aproximación al centro de fuerzas, (c) el ángulo que forma la dirección en que se aleja con la dirección inicial. Comparar sus respuestas con los resultados del ejemplo 7.16. [Sugerencia: Notar que las fórmulas en este capítulo puede aplicarse si  $-\gamma mm'$  se reemplaza por  $k$ ].

13.67 Calcular la intensidad del campo gravitacional y el potencial en la superficie de la tierra debido a la tierra misma.

13.68 Estimar el valor del campo gravitacional de la tierra y la aceleración

hacia el centro de un cuerpo en un punto situado a una distancia (a)  $\frac{1}{2}R$ , (b)  $\frac{1}{4}R$  del centro de la tierra. Suponer que la tierra es homogénea.

13.69 Calcular la magnitud del campo gravitacional y el potencial producido por el sol a lo largo de la órbita de la tierra. Comparar estos valores con el campo gravitacional y el potencial producido por la luna sobre la tierra.

13.70 Dos cuerpos de masas  $m$  y  $3m$  están separados por una distancia  $a$ . Encontrar los puntos donde (a) el campo gravitacional resultante es cero, (b) las dos masas producen campos gravitacionales iguales en magnitud y dirección, (c) las dos masas producen potenciales gravitacionales idénticos.

13.71 Dos cuerpos de masas  $m$  y  $3m$  están separados por una distancia  $13a$ . Encontrar el campo gravitacional resultante y el potencial en un punto  $P$  situado a una distancia  $5a$  de la primera masa, sabiendo que las líneas que unen a  $P$  con las dos masas hacen un ángulo recto.

13.72 Dos cuerpos de masas  $m$  y  $2m$  se encuentran en los vértices de un triángulo equilátero de lado  $a$ . Encontrar el campo gravitacional y el potencial en (a) el punto medio entre los vértices, (b) el tercer vértice del triángulo.

13.73 Tres masas iguales están situadas en los vértices de un triángulo equilátero. Hacer un esquema de las superficies equipotenciales (realmente su intersección con el plano del triángulo) y de las líneas de fuerzas del campo gravitacional. ¿Hay algún punto en el cual la fuerza gravitacional es cero?

13.74 Obtener el campo gravitacional y el potencial producido por un anillo de masa  $m$  y radio  $R$  en puntos situados a lo largo del eje perpendicular al anillo que pasa por su centro.

13.75 En referencia al problema precedente, se suelta una partícula desde un punto situado sobre el eje a una distancia  $h$  del centro, (a) ¿Cuál será su velocidad cuando pasa por el centro? (b) ¿Qué distancia recorrerá en el otro lado? (c) ¿Es el movimiento periódico? ¿Bajo qué condiciones es el movimiento

prácticamente armónico simple? Determinar la frecuencia correspondiente en este último caso.

13.76 Dos placas delgadas de material idéntico están separadas por una distancia  $a$ . Calcular el campo gravitacional que producen en la región situada entre las placas y a cada lado de ellas.

13.77 Demostrar que el campo gravitacional y el potencial de un filamento delgado que tiene una masa  $\lambda$  por unidad de longitud son

$$\mathcal{G} = -(2\gamma\lambda/R)\mathbf{u}_R$$

y  $V = 2\gamma\lambda \ln R$ , respectivamente, donde  $R$  es la distancia desde el punto al filamento. [Sugerencia: Determinar primero, en vista de la simetría, cuál debía ser la dirección del campo, y las variables que lo determinan. Luego dividir el filamento en pequeñas porciones, cada una de longitud  $dx$ , y calcular la componente de su campo en la dirección final. Una vez obtenido el campo resultante por integración, puede obtenerse el potencial gravitacional a partir del campo usando la ec. (13.21)].

13.78 Determinar la velocidad y la energía total de una partícula que describe una órbita circular alrededor del filamento del problema 13.77, y que está sometida a su atracción gravitacional.

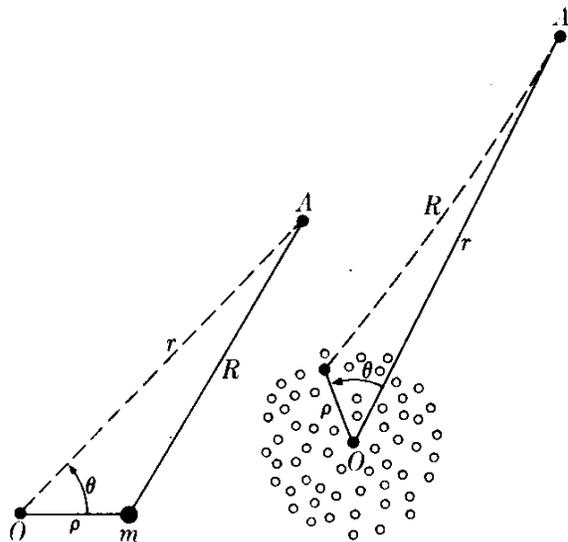


Figura 13-36

Figura 13-37

13.79 Reconsiderar el problema 13.8 para el caso en el que la capa delgada de materia se reemplaza por una placa homogénea de espesor  $D$ .

13.80 Suponer que una masa  $m$  se encuentra a una distancia  $\rho$  de un cierto punto  $O$ , usando como referencia (Fig. 13-36). Demostrar que el potencial gravitatorio en  $A$ , a una distancia  $R$  de  $m$  ( $R$  mayor que  $\rho$ ), puede expresarse, en función de la distancia  $OA = r$  y el ángulo  $\theta$  por la serie

$$V = -(\gamma m/r) [1 + \rho \cos \theta/r + \rho^2(3 \cos^2 \theta - 1)/2r^2 + \dots].$$

[Sugerencia: Expresar  $R$  en función de  $\rho$ ,  $r$ , y  $\theta$  por la ley de los cosenos, y evaluar  $1/R$  por el método de la expansión binomial].

13.81 Considerar un conjunto de masas  $m_1, m_2, m_3, \dots$  (Fig. 13-37). Demostrar que el potencial gravitacional en un punto  $A$ , a una distancia grande comparada con las dimensiones del conjunto, puede expresarse como

$$V = -\gamma[M/r + P/r^2 + Q/r^3 + \dots],$$

donde  $M = \sum_i m_i$  es la masa total,  $P = \sum_i \rho_i \cos \theta$  se denomina el *momento dipolar* de la distribución de masa con respecto a  $OA$  y  $Q = \sum_i \frac{1}{2} \rho_i^2 (3 \cos^2 \theta_i - 1)$  se denomina el *momento cuadrupolar* de la distribución de masa, y así sucesivamente. [Sugerencia: Usar los resultados del problema 13.80 para cada masa, y sumar]. Los términos "dipolo" y "cuadrupolo" se explicarán en el capítulo 14 (volumen II).