11
DINAMICA DE ALTA ENERGIA

11.1 Introducción
11.2 Principio clásico de relatividad
11.3 Principio especial de relatividad
11.4 Momentum
11.5 Fuerza
11.6 Energía
11.7 Transformación de energía y momentum
11.8 Transformación de fuerza
11.9 Sistemas de partículas
11.10 Colisiones de alta energía

11.1 Introducción

En los capítulos anteriores hemos desarrollado una teoría llamada mecánica *clásica* o *newtoniana* para describir el movimiento de cuerpos que observamos a nuestro alrededor. La teoría se basa en varias suposiciones. Por ejemplo, hemos visto que el momentum puede expresarse como $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, donde la masa m es un coeficiente característico de la partícula o del sistema; hemos considerado siempre esta masa m como un coeficiente invariante de cada partícula o sistema. Siempre que la magnitud de las velocidades que observamos no sea muy grande, esta suposición sobre la masa parece ser válida y compatible con nuestra experiencia. Pero existe la posibilidad de que experimentando con velocidades muy grandes esta suposición no permanezca correcta. De hecho, se encuentran discrepancias al estudiar el movimiento de partículas muy energéticas, tales como los electrones interiores de los átomos o las partículas halladas en los rayos cósmicos o producidas en los aceleradores de alta energía. El propósito de este capítulo es desarrollar una teoría general del movimiento válida para partículas tanto de baja como de alta energía. Apoyaremos el desarrollo de esta teoría en la transformación de Lorentz, ya discutida en la sección 6.6, y en el *principio de relatividad.* Por esta razón la nueva teoría se llama también *mecánica relativista.*

11.2 Principio clásico de la relatividad

En el capítulo 6 discutimos la naturaleza relativa del movimiento y derivamos expresiones para las velocidades y aceleraciones tal como son medidas por dos observadores en movimiento relativo. En particular, en la sección 6.3, derivamos la transformación galileana para dos observadores en movimiento traslacional uniforme relativo.

En el capítulo 7 enfatizamos el hecho de que las leyes del movimiento tienen que ser consideradas como referidas, o relativas, a un observador inercial. Ahora supondremos que dos observadores inerciales diferentes, moviéndose con velocidad constante relativa, correlacionarán por la transformación de Galileo sus respectivas observaciones del mismo fenómeno. Debemos ahora observar críticamente este asunto, verificando que si las leyes de la dinámica son válidas para un observador inercial, también lo son para todos los observadores inerciales. Es necesario verificar este enunciado sólo para el *principio de conservación del momentum* y para la *definición de fuerza,* ya que todas las otras leyes de la dinámica se derivan de esas dos. La hipótesis de que *todas las leyes de la dinámica deben ser las mismas para todos los observadores inerciales, que se mueven con velocidad constante unos con respecto a otros,* es lo que constituye el *principio clásico de relatividad.*

Consideremos dos partículas, de masas m_1 y m_2, y llamemos $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ sus velocidades medidas por un observador inercial O. Si no hay fuerzas externas que actúen sobre las partículas, el principio de conservación del momentum requiere que

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = \text{const.} \tag{11.1}$$

Para otro observador inercial O', que se mueve relativamente a O con la velocidad constante $\boldsymbol{v}$, las velocidades de m_1 y m_2 son $\boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}$, de acuerdo con la ec. (6.9), derivada de la transformación de Galileo. Sustituyendo tales valores en la ec. (11.1) tenemos

$$m_1(\boldsymbol{v}_1' + \boldsymbol{v}) + m_2(\boldsymbol{v}_2' + \boldsymbol{v}) = \text{const},$$

ó

$$m_1\boldsymbol{v}_1' + m_2\boldsymbol{v}_2' = \text{const} - (m_1 + m_2)\boldsymbol{v} = \text{const}. \tag{11.2}$$

Notemos que el nuevo resultado es constante sólo si $\boldsymbol{v}$ es también constante; esto es, si O' es otro observador inercial. La ec. (11.2) es completamente similar a la ec. (11.1) y, por consiguiente, ambos observadores inerciales verifican el mismo principio de conservación del momentum.

Discutamos en seguida la relación entre la fuerza medida por dos observadores O y O' moviéndose con una velocidad relativa constante $\boldsymbol{v}$. Supongamos que O y O' miden ambos la misma masa para una partícula que observan en movimiento, una suposición basada en la experiencia, por lo menos siempre que la velocidad relativa $\boldsymbol{v}$ sea pequeña comparada con la velocidad de la luz. Si $\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{V}'$ son los valores respectivos de la velocidad de la partícula con respecto a los dos observadores, ellas están relacionadas por la ec. (6.9), $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}' + \boldsymbol{v}$. Ya que $\boldsymbol{v}$ es constante, $d\boldsymbol{v}/dt = 0$, y tenemos que

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{V}'}{dt} \qquad \text{ó} \qquad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'. \tag{11.3}$$

Esto es, ambos observadores miden la misma aceleración (recordar la ec. 6.13). Según la definición de fuerza dada en la ec. (7.12), tenemos que la fuerza medida por cada observador es

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = m\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = m\boldsymbol{a} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{F}' = \frac{d\boldsymbol{p}'}{dt} = m\frac{d\boldsymbol{V}'}{dt} = m\boldsymbol{a}'.$$

En vista de que $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$, concluimos que

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}'. \tag{11.4}$$

Por consiguiente *ambos observadores inerciales miden la misma fuerza sobre la partícula* cuando tales observadores comparan sus medidas usando la transformación de Galileo.

Dejamos al estudiante la tarea de verificar que si la energía se conserva con respecto al observador inercial O, esto es, que si

$$E = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 + E_{p,12} = \text{const},$$

entonces, también se conserva con relación al observador inercial O', y

$$E' = \tfrac{1}{2}m_1v_1'^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2'^2 + E_{p,12}' = \text{const},$$

donde $E'_{p,12} = E_{p,12}$ si la energía potencial depende únicamente de la distancia entre las partículas. (Para la relación entre E' y E, ver el problema 11.1). Por consiguiente, en lo que concierne a las leyes fundamentales de la dinámica, la descripción del movimiento es la misma para ambos observadores inerciales.

EJEMPLO 11.1. Discutir la forma de la ecuación del movimiento cuando es usada con referencia a un observador no inercial.

Solución: Si un observador O' es no inercial, ello significa que su velocidad $\boldsymbol{v}$, relativa a un observador inercial O, no es constante en el tiempo. Por tanto $d\boldsymbol{v}/dt \neq 0$. Entonces, dado que $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}' + \boldsymbol{v}$, tenemos que

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{V}'}{dt} + \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}.$$

La fuerza medida por el observador inercial es $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$. Entonces, si el observador no inercial O' utiliza la misma definición de fuerza debe escribir $\boldsymbol{F}' = m\boldsymbol{a}'$. Por tanto, en vista de la relación entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{a}'$.

$$\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F} - m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}. \tag{11.5}$$

De esa manera *el observador no inercial mide una fuerza diferente de la que mide el observador inercial*. En otras palabras, el observador no inercial considera que, además de la fuerza $\boldsymbol{F}$ medida por el observador inercial (que incluye todas las interacciones a las que está sujeta la partícula), hay otra fuerza $\boldsymbol{F}''$ actuando sobre la partícula,

$$\boldsymbol{F}'' = -m\, d\boldsymbol{v}/dt, \tag{11.6}$$

de modo que la fuerza resultante sobre la partícula es $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}''$. Esta fuerza ficticia se llama *fuerza inercial*.

Cuando deseamos describir el movimiento de una partícula con relación a la tierra (que no es un sistema inercial de referencia) usamos este tipo de lógica. En este caso $d\boldsymbol{v}/dt$ es la aceleración centrípeta $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$ (recordar la ec. 6.25). Por consiguiente la fuerza inercial es $\boldsymbol{F}'' = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$ y corresponde a una fuerza centrífuga actuante sobre la partícula además del peso.

11.3 Principio especial de relatividad

En 1905, el físico alemán Albert Einstein (1879-1955) dio un paso más adelante y propuso el *principio especial de relatividad*, enunciando que

> *todas las leyes de la naturaleza (no solamente de la dinámica) deben ser las mismas para todos los observadores inerciales moviéndose con velocidad constante unos con respecto a otros.*

Este principio nuevo, o especial, de relatividad tiene importantes consecuencias, porque si lo aceptamos, debemos expresar todas las leyes físicas de tal modo que no cambien al pasar de un observador inercial a otro, hecho que acabamos de verificar para las leyes de la dinámica, usando la transformación galileana. El resultado de esta exigencia es la restricción impuesta sobre la expresión matemática de dichas leyes. Entre las leyes que deben permanecer invariantes para todos los observadores inerciales están aquellas que describen los fenómenos electromagnéticos; ellas serán discutidas en detalle en capítulos posteriores.

Pero podemos adelantar que dichas leyes, al ser expresadas con relación a un observador inercial, incluyen una velocidad c, esto es, la velocidad de la luz. Por consiguiente, el principio especial de relatividad, tal como fue formulado por Einstein, requiere que la velocidad de la luz sea la misma para todos los observadores inerciales.

La suposición de Einstein fue motivada en parte por la memorable serie de experimentos empezados alrededor de 1880 por Michelson y Morley, quienes midieron la velocidad de la luz en diferentes direcciones, tratando de ver cómo era afectada por el movimiento de la tierra. Discutimos este experimento en el capítulo 6 (particularmente en el ejemplo 6.7). Los resultados, como se indicó en el capítulo 6, han sido siempre negativos, indicando que *la magnitud de la velocidad de la luz es independiente del movimiento del observador.*

Ahora, de acuerdo a la ec. (6.9), la velocidad de un objeto nunca es la misma para dos observadores en movimiento relativo si sus observaciones están relacionadas por una transformación Galileana. Por otra parte, la velocidad de la luz es la misma para todos los observadores inerciales si sus medidas se relacionan entre sí por medio de la transformación de Lorentz, como se discutió en la sección 6.6. Por consiguiente, para satisfacer el nuevo principio de relatividad, debemos usar la transformación de Lorentz en vez de la transformación de Galileo. Consecuentemente, volveremos a enunciar el principio de relatividad en la siguiente forma:

> *Los observadores inerciales deben correlacionar sus observaciones por medio de la transformación de Lorentz, y todas las magnitudes físicas deben transformarse de un sistema inercial a otro de tal modo que la expresión de las leyes físicas sea la misma para todos los observadores inerciales.*

Lo que resta de este capítulo será dedicado a una discusión de cómo esta nueva formulación del principio de relatividad afecta las cantidades dinámicas definidas previamente. Desde un punto de vista práctico, la teoría que desarrollaremos es importante solamente para velocidades comparables a la de la luz, y, por consiguiente, debe ser usada cuando las partículas tienen una energía muy alta. Para partículas con energías bajas, la transformación Galileana es una aproximación muy buena para relacionar magnitudes físicas en los sistemas inerciales, y la mecánica newtoniana proporciona un formalismo satisfactorio para describir dichos fenómenos. La teoría por desarrollar se llama la teoría *especial* de la relatividad porque se aplica solamente a los observadores inerciales. Cuando los observadores no son inerciales, empleamos la teoría *general* de relatividad, la cual discutiremos brevemente al final del capítulo 13.

Aun si, desde un punto de vista práctico, podemos ignorar la teoría especial de la relatividad en muchos casos, desde un punto de vista conceptual esta teoría ha producido una modificación profunda en nuestros métodos teóricos para analizar los fenómenos físicos.

11.4 Momentum

En el capítulo 7 definimos el momentum de una partícula por $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ y supusimos que la masa m era independiente de la velocidad. Sin embargo, como resultado de muchos experimentos con partículas de alta energía, tales como protones y electrones rápidos producidos por los aceleradores modernos, o encontrados en los rayos cósmicos, se ha hallado que esta suposición ya no es válida. Recordemos que la fuerza aplicada sobre una partícula ha sido definida como $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$, y que ejerciendo fuerzas conocidas en partículas veloces podemos determinar experimentalmente la correspondiente expresión para $\boldsymbol{p}$. [Podemos, por ejemplo, observar el movimiento de electrones (u otras partículas cargadas) en campos magnéticos y eléctricos conocidos]. El resultado de esos experimentos ha sido que la masa de la partícula moviéndose con una velocidad $\boldsymbol{v}$ relativa al observador parece estar dada por

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = km_0. \tag{11.7}$$

Aquí se define k como en la ec. (6.32) y m_0 es una constante característica de cada partícula llamada *masa en reposo*, ya que es el valor de m cuando $v = 0$, esto es, cuando la partícula está en reposo con respecto al observador. La presencia del factor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ que encontramos antes en el capítulo 6 al tratar de la transformación de Lorentz, no es sorprendente, ya que nuestro nuevo principio de relatividad basado en esta transformación puede requerir su uso.

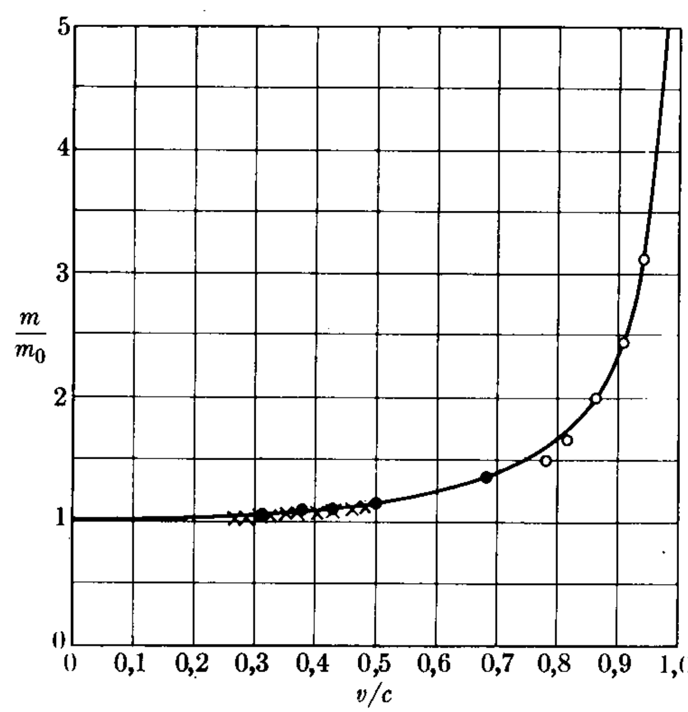

Fig. 11-1. Confirmación experimental de la variación de la masa con la velocidad. La línea es una curva basada en la ec. (11.7). Los datos experimentales de W. Kaufmann (1901) se indican con círculos abiertos, los de A. Bucherer (1909) con círculos negros, y los de C. Guye y C. Lavanchy (1915) con cruces.

La variación de la masa con la velocidad según la ec. (11.7) está ilustrada en la Fig. 11-1. Esta figura es esencialmente idéntica a la Fig. 6-15 ya que ambas dan k en términos de v/c. Puede verse que solamente a muy altas velocidades hay un aumento notable en la masa de la partícula. Por ejemplo, aun para $v = 0{,}5c$, $m/m_0 = 1{,}15$, o sea solamente hay un 15 % de aumento en la masa.

El momentum de una partícula que se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}$ relativa a un observador debe por consiguiente ser expresada por:

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = \frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = km_0\boldsymbol{v}. \tag{11.8}$$

Para pequeñas velocidades ($v \ll c$), k puede igualarse a 1, y esta nueva expresión viene a ser idéntica a la usada en capítulos anteriores.

Tenemos aún que verificar que esta expresión para el momentum satisface los principios de relatividad. Esto es, debemos verificar que, si el movimiento de la partícula está referido a un observador inercial diferente, respecto al cual la partícula se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}'$, el momentum $\boldsymbol{p}'$ queda expresado al reemplazar $\boldsymbol{v}$ por $\boldsymbol{v}'$ en la ec. (11.8), y que las dos expresiones para el momentum son compatibles con la transformación de Lorentz que relaciona a los dos observadores. Tenemos también que verificar que esta nueva definición del momentum es compatible con la invariancia del principio de conservación del momentum para todos los observadores inerciales. Este asunto será pospuesto hasta las secciones 11.7 y 11.9.

EJEMPLO 11.2. Comparar el aumento relativo en velocidad con el aumento relativo en nomentum.

Solución: El aumento relativo en momentum se define como dp/p, y el aumento relativo en velocidad como dv/v. El momentum y la velocidad están relacionados por la ec. (11.8), cuya forma escalar es

$$p = \frac{m_0 v}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}.$$

La definición del aumento relativo en velocidad sugiere que primero tomemos el logaritmo de esta expresión. Esto es.

$$\ln p = \ln m_0 + \ln v - \tfrac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Diferenciando, obtenemos

$$\frac{dp}{p} = \frac{dv}{v} + \frac{(v/c^2)\,dv}{1 - v^2/c^2} = \frac{1}{1 - v^2/c^2}\,\frac{dv}{v} = k^2\,\frac{dv}{v}.$$

Vemos entonces que a bajas velocidades, cuando v^2/c^2 es despreciable, tenemos que $dp/p = dv/v$, y los aumentos relativos en momentum y velocidad son iguales, de acuerdo a nuestra experiencia diaria, Sin embargo, a mayores velocidades, comparables, con c, el factor que multiplica a dv/v es muy grande, y así es posible producir un aumento relativamente grande en el momentum con un aumento relativamente pequeño en la velocidad. Por ejemplo, para $v = 0{,}7\,c$, tenemos que $dp/p \approx 2(dv/v)$, y para $v = 0{,}99c$, obtenemos $dp/p \approx 50(dv/v)$.

11.5 Fuerza

En el capítulo 7 definimos la fuerza sobre una partícula por medio de la ec. (7.12), la que fue obtenida del principio de conservación del momentum. Esta definición será mantenida en la mecánica relativística. Por ello redefinimos la fuerza como

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right). \tag{11.9}$$

Al tratar del *movimiento rectilíneo* consideramos solamente las magnitudes y por tanto podemos escribir

$$F = \frac{d}{dt}\left[\frac{m_0 v}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}\right] = \frac{m_0(dv/dt)}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{m}{1 - v^2/c^2}\frac{dv}{dt}. \tag{11.10}$$

En la ec. (11.10) m tiene el valor dado por la ec. (11.7). Ya que dv/dt es la aceleración, concluimos que para una partícula de alta energía la ecuación $F = ma$ no es respetada en el movimiento rectilíneo. Por otra parte, en el caso del *movimiento circular uniforme*, la velocidad permanece constante en magnitud pero no en dirección y la ec. (11.9) se transforma en

$$\boldsymbol{F} = \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}.$$

Pero $d\boldsymbol{v}/dt$ es entonces la aceleración normal o centrípeta cuya magnitud es v^2/R, donde R es el radio de la circunferencia de acuerdo con la ec. (5.44). Por tanto la magnitud de la fuerza normal o centrípeta viene a ser

$$F_N = \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}\frac{v^2}{R} = m\frac{v^2}{R} = \frac{pv}{R}. \tag{11.11}$$

Observamos que la relación $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ se satisface en el caso del movimiento circular uniforme si usamos para la masa la expresión relativística (11.7). En el caso general del *movimiento curvilíneo*, notando que dv/dt es la aceleración tangencial y que v^2/R la aceleración normal (de acuerdo a la ec. 5.44), concluimos de las ecs. (11.10) y (11.11) que las componentes de la fuerza a lo largo de la tangente y la normal a la trayectoria son, usando la ec. (11.7),

$$\begin{aligned} F_T &= \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} a_T = \frac{m}{1 - v^2/c^2} a_T = k^2 m a_T, \\ F_N &= \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} a_N = m a_N. \end{aligned} \tag{11.12}$$

Una conclusión inmediata es que la fuerza *no* es paralela a la aceleración (Fig. 11-2) porque los coeficientes multiplicadores de a_T y a_N son diferentes. Por tanto, una relación vectorial del tipo $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ no existe para partículas que tienen alta energía, a menos que el cuerpo se mueva con movimiento circular uniforme.

Sin embargo, la relación más fundamental $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$ permanece aún válida, porque es nuestra *definición* de fuerza. Otro hecho interesante es que, proporcionalmente, la componente tangencial F_T es mayor que la componente normal F_N. Esto sucede porque la fuerza normal cambia solamente la dirección de la velocidad sin cambiar su magnitud, y por tanto sin cambiar tampoco la masa. Pero la fuerza tangencial no solamente cambia la magnitud de la velocidad sino que también, como consecuencia, varía la masa de la partícula.

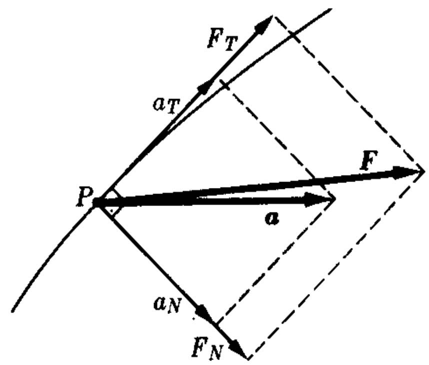

Fig. 11-2. A alta velocidad, la fuerza no es paralela a la aceleración.

EJEMPLO 11.3. Movimiento rectilíneo bajo una fuerza constante en dinámica relativística.

Solución: Este movimiento, en mecánica no relativística, corresponde al movimiento con aceleración constante. Así, si medimos el tiempo y el desplazamiento desde el punto donde la partícula empezó a moverse, podemos usar las ecuaciones (5.10) y (5.11) para hallar que $v = at$ y $x = \frac{1}{2}at^2$, donde $a = F/m_0$ es la aceleración constante. En mecánica relativística empezamos con la ecuación (11.9) escrita escalarmente, ya que el movimiento es en línea recta y no hay cambios en la dirección. Por tanto

$$F = \frac{d}{dt}\left[\frac{m_0 v}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}\right].$$

Integrando esta expresión, tomando en cuenta el hecho de que F es constante (y que para $t = 0$, $v = 0$), tenemos

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = Ft.$$

Despejando la velocidad, encontramos que

$$v = c\,\frac{(F/m_0 c)t}{\sqrt{1 + (F/m_0 c)^2 t^2}}.$$

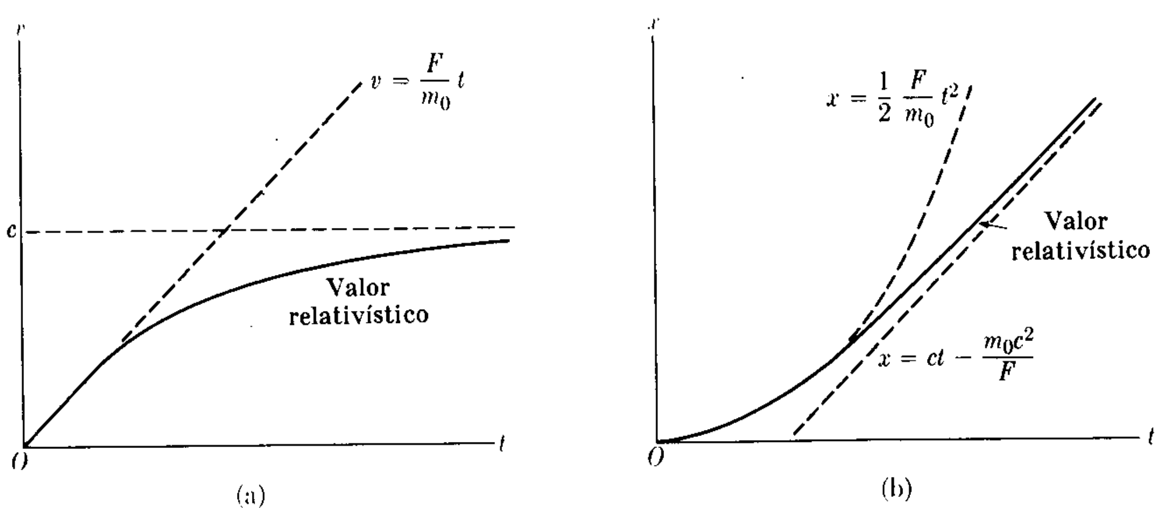

Fig. 11-3. Movimiento rectilíneo relativístico bajo una fuerza constante.

Sin embargo, la relación más fundamental $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$ permanece aún válida, porque es nuestra *definición* de fuerza. Otro hecho interesante es que, proporcionalmente, la componente tangencial F_T es mayor que la componente normal F_N. Esto sucede porque la fuerza normal cambia solamente la dirección de la velocidad sin cambiar su magnitud, y por tanto sin cambiar tampoco la masa. Pero la fuerza tangencial no solamente cambia la magnitud de la velocidad sino que también, como consecuencia, varía la masa de la partícula.

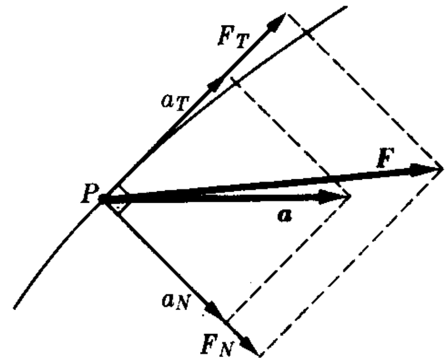

Fig. 11-2. A alta velocidad, la fuerza no es paralela a la aceleración.

EJEMPLO 11.3. Movimiento rectilíneo bajo una fuerza constante en dinámica relativística.

Solución: Este movimiento, en mecánica no relativística, corresponde al movimiento con aceleración constante. Así, si medimos el tiempo y el desplazamiento desde el punto donde la partícula empezó a moverse, podemos usar las ecuaciones (5.10) y (5.11) para hallar que $v = at$ y $x = \frac{1}{2}at^2$, donde $a = F/m_0$ es la aceleración constante. En mecánica relativística empezamos con la ecuación (11.9) escrita escalarmente, ya que el movimiento es en línea recta y no hay cambios en la dirección. Por tanto

$$F = \frac{d}{dt}\left[\frac{m_0 v}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}\right].$$

Integrando esta expresión, tomando en cuenta el hecho de que F es constante (y que para $t = 0$, $v = 0$), tenemos

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = Ft.$$

Despejando la velocidad, encontramos que

$$v = c\,\frac{(F/m_0 c)t}{\sqrt{1 + (F/m_0 c)^2 t^2}}.$$

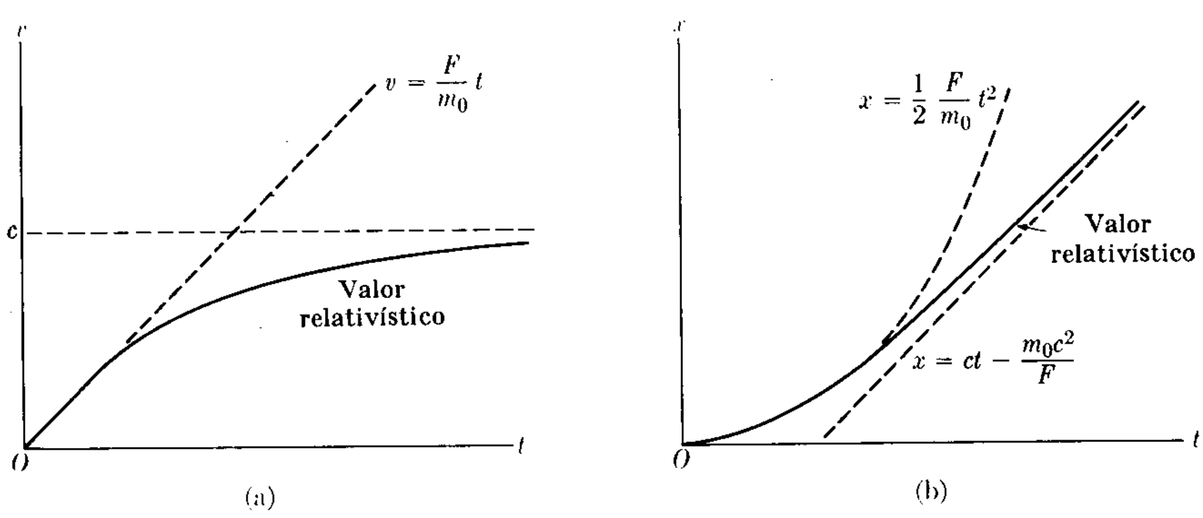

Fig. 11-3. Movimiento rectilíneo relativístico bajo una fuerza constante.

Para muy pequeños valores de t (esto es, cuando la medición tiene lugar al comienzo del movimiento), el segundo término del denominador puede despreciarse y $v \approx (F/m_0)t$, que es la expresión no relativista, ya que en este caso $a = F/m_0$. Para valores grandes de t (esto es, cuando la medición es hecha después que la partícula ha sido acelerada por un largo tiempo), el 1 en el denominador puede ser despreciado en comparación con el segundo término, y $v \approx c$. Por tanto, en vez de aumentar indefinidamente, la velocidad se aproxima al valor límite c, que es la velocidad de la luz. Esta variación de velocidad con el tiempo es indicada por la línea sólida de la Fig. 11-3 (a). El momentum, sin embargo, está dado por $p = Ft$, y aumenta indefinidamente. Para obtener el desplazamiento de la partícula recordamos que $v = dx/dt$. Por tanto

$$\frac{dx}{dt} = c\,\frac{(F/m_0c)t}{\sqrt{1 + (F/m_0c)^2t^2}}.$$

Integrando (poniendo $x = 0$ cuando $t = 0$), tenemos

$$x = \frac{m_0c^2}{F}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{F}{m_0c}\right)^2 t^2} - 1\right].$$

Usando la expansión binomial (M.28) con $n = 1/2$, la ecuación se reduce a $x = \frac{1}{2}(F/m_0)t^2$ para valores pequeños de t; este es el valor no relativista. Para valores grandes de t, tenemos $x \approx ct - (m_0c^2/F)$, que corresponde al movimiento uniforme con velocidad c. Por tanto, la distancia es menor que si las expresiones no relativistas fueran válidas a todas las velocidades. Ello se indica por la línea sólida en la Fig. 11-3 (b). Este problema es de interés en muchos aspectos; por ejemplo, en el movimiento de una partícula cargada en un acelerador lineal.

11.6 Energía

Para computar la energía cinética de una partícula usando la nueva definición de momentum, usamos el mismo procedimiento que en la sección 8.5 donde hablábamos de mecánica newtoniana. Esto es, recordando que $v = ds/dt$, obtenemos

$$E_k = \int_0^v F_T\,ds = \int_0^v \frac{d}{dt}(mv)\,ds = \int_0^v v\,d(mv).$$

Integrando por partes (ver ec. M.41) y usando la expresión relativista (11.7) para la masa, tenemos

$$\begin{aligned} E_k &= mv^2 - \int_0^v mv\,dv = \frac{m_0v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \int_0^v \frac{m_0v\,dv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{m_0v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + m_0c^2\sqrt{1 - v^2/c^2} - m_0c^2. \end{aligned}$$

Combinando los dos primeros términos del lado derecho en uno solo, obtenemos finalmente la energía cinética de una partícula que se mueve con velocidad v relativa a un observador

$$E_k = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0c^2 = (m - m_0)c^2, \tag{11.13}$$

donde la ec. (11.7) ha sido usada para escribir la última parte. El resultado (11.13) es muy sugestivo. Indica que la ganancia en energía cinética puede ser considerada como una ganancia en masa como resultado de la dependencia de la masa con la velocidad, de acuerdo a la ec. (11.7). Esta interpretación puede ser extendida para asociar un cambio en la masa Δm a cualquier cambio en la energía ΔE del sistema. Ambos cambios están relacionados por la expresión

$$\Delta E = (\Delta m)c^2, \tag{11.14}$$

la cual es una extensión de la ec. (11.13). Por ejemplo, la conservación de la energía de un sistema aislado requiere que $(E_k + E_p)_2 = (E_k + E_p)_1 = \text{const}$, o $E_{k2} - E_{k1} = E_{p1} - E_{p2}$. Pero, según la ecuación (11.13), $E_{k2} - E_{k1} = (m_2 - m_1)c^2$. Por consiguiente:

$$(m_2 - m_1)c^2 = E_{p1} - E_{p2}. \tag{11.15}$$

La ec. (11.15) significa que cualquier cambio en la energía potencial interna del sistema, debido a una redistribución interna, puede ser expresado como el cambio en la masa del sistema como resultado de un cambio en la energía cinética interna. Debido al factor c^2, los cambios de masa son apreciables solamente si los cambios en energía son muy grandes. Por esta razón el cambio en la masa resultante de transformaciones de energía es apreciable sólo para interacciones nucleares o en física de alta energía, y es prácticamente despreciable en reacciones químicas.

La magnitud m_0c^2 que aparece en la ec. (11.13) se llama *energía en reposo* de la partícula, y la cantidad

$$E = E_k + m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = mc^2 \tag{11.16}$$

es la energía *total* de la partícula. La energía total de la partícula, tal como está definida aquí, incluye la energía cinética y la energía en reposo, pero no la energía potencial.

Combinando la ec. (11.8) con la ec. (11.16), vemos que $v = c^2p/E$. Esta expresión da la velocidad en término del momentum y la energía. Ya que $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{p}$ tienen la misma dirección, esta expresión es también válida para los vectores, y podemos escribir

$$\boldsymbol{v} = \frac{c^2\boldsymbol{p}}{E}. \tag{11.17}$$

La ec. (11.16) es equivalente a

$$E = c\sqrt{m_0^2c^2 + p^2}, \tag{11.18}$$

como podemos ver reemplazando p por su expresión (11.8) y verificando que la ec. (11.18) se transforma en la ec. (11.16).

A primera vista, la ec. (11.13) para la energía cinética relativista puede parecer muy distinta de la ec. (8.12) para la energía cinética newtoniana (esto es, $E_k = \frac{1}{2}mv^2$).

Sin embargo, no es así. Cuando v es pequeña comparada con c, podemos desarrollar el denominador en la ec. (11.7), usando el teorema binominal (M.22):

$$m = m_0\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = m_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \ldots\right).$$

Sustituyendo en la ec. (11.13), encontramos que

$$E_k = \tfrac{1}{2}m_0v^2 + \tfrac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^2} + \ldots \tag{11.19}$$

El primer término es la energía cinética ya conocida de la ec. (8.12). El segundo, y los siguientes términos, son despreciables si $v \ll c$. En esta forma verificamos nuevamente que la mecánica newtoniana es sólo una aproximación de la mecánica relativista, válida para pequeñas velocidades o energías y usando para la masa su valor de reposo. Por otra parte, a muy altas velocidades podemos reemplazar v por c en el numerador de la ec. (11.8) para el momentum, escribiendo $p = mc$. Entonces la energía cinética dada por la ec. (11.13) va a ser

$$E_k = pc - m_0c^2 = c(p - m_0c). \tag{11.20}$$

En la Fig. 11-4, la variación de la energía cinética E_k dada por la ec. (11.13) ha sido indicada por la curva a, y la energía cinética newtoniana $E_k = \frac{1}{2}m_0v^2$ por la curva b. Esta figura nos muestra claramente que, a igualdad de velocidades, la energía relativista es mayor que la newtoniana. En la Fig. 11-5 la energía cinética ha sido representada en términos del momentum. Puede verse, que, para momenta iguales, la energía relativista (curva a) es menor que la energía newtoniana (curva b). La curva relativista se aproxima asintóticamente al valor dado por la ec. (11.20).

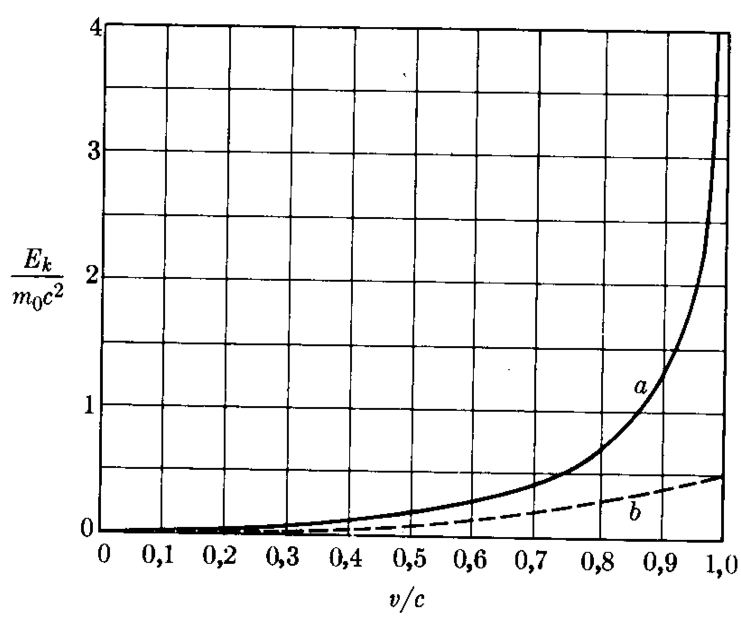

Fig. 11-4. Variación de la energía con la velocidad; (a) relativista, (b) newtoniana.

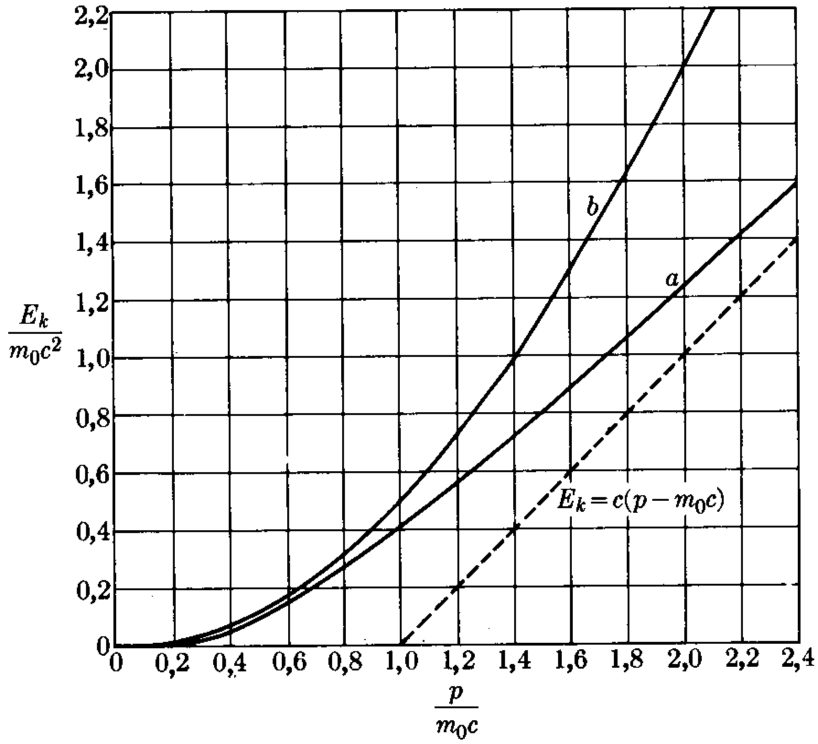

Fig. 11-5. Variación de la energía cinética con el momentum; (a) relativista, (b) newtoniana.

Debemos notar que las razones m/m_0 y E_k/m_0c^2 son las mismas para todas las partículas que tienen la misma velocidad. Por tanto, dado que la masa del protón es alrededor de 1850 veces la masa del electrón, los efectos relativistas en el movimiento de los protones son percibidos solamente en energías 1850 veces mayores. Por esta razón el movimiento de protones y neutrones en los núcleos atómicos puede tratarse en muchos casos sin hacer consideraciones relativistas, mientras que el movimiento de los electrones requiere, en la mayoría de los casos, un tratamiento relativista.

Ocurre un caso especial interesante cuando la partícula no tiene masa en reposo ($m_0 = 0$). Entonces la ec. (11.18) se transforma en

$$E = cp \qquad \text{ó} \qquad p = E/c. \tag{11.21}$$

Y por consiguiente, por la ec. (11.17), encontramos que la velocidad de la partícula es $v = c$. En consecuencia, una partícula con masa en reposo nula puede moverse solamente con la velocidad de la luz y nunca puede estar en reposo en un sistema inercial. Este es el caso del fotón, y parece ser también el del neutrino, como veremos en capítulos posteriores. La relación (11.21) también es válida cuando una partícula, con masa m_0 no necesariamente cero, se mueve a velocidad comparable con la de la luz, de modo que su momentum p sea grande comparado con m_0c. Esto se puede ver ya que, cuando en la ec. (11.18) despreciamos el término m_0c en comparación con p, la ecuación se reduce a la ec. (11.21).

EJEMPLO 11.4. Comparar el aumento relativo en la velocidad y el momentum con el aumento relativo en la energía.

Solución: Resolviendo la ec. (11.18) para v, tenemos

$$v = c\left(1 - \frac{m_0^2c^4}{E^2}\right)^{1/2}.$$

Cuando la velocidad de una partícula aumenta en la cantidad dv y su energía en la cantidad dE, el aumento relativo en la velocidad está dado por dv/v y el aumento relativo en la energía por dE/E. Esto sugiere, como en el ejemplo 11.2, que debemos tomar el logaritmo de la expresión anterior antes de diferenciarla. Esto es,

$$\ln v = \ln c + \tfrac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{m_2^0c^4}{E^2}\right).$$

Diferenciando, obtenemos

$$\frac{dv}{v} = \frac{m_0^2c^4}{E^2 - m_0^2c^4}\,\frac{dE}{E}.$$

Si la energía de la partícula es muy alta comparada con su masa de reposo, de modo que $E \gg m_0c^2$, podemos despreciar $m_0^2c^4$ en el denominador, obteniendo

$$\frac{dv}{v} = \frac{m_0^2c^4}{E^2}\,\frac{dE}{E}.$$

El coeficiente que multiplica el aumento relativo en energía es siempre menor que la unidad porque, a alta energía, E es mucho mayor que m_0c^2. Por consiguiente, a altas energías dv/v es muy pequeña comparada con dE/E. En otras palabras, a energías altas es posible aumentar la energía de la partícula sin que apreciablemente aumente su velocidad. Esta característica es de gran importancia en el diseño de aceleradores de alta energía, tanto lineales como circulares. Sugerimos que el estudiante repita el mismo cálculo, usando la mecánica newtoniana, y compare los resultados.

Por otra parte, en lo que se refiere al momentum p, tenemos de la ecuación (11.18) que

$$\ln E = \ln c + \tfrac{1}{2}\ln(m_0^2c^2 + p^2)$$

y, diferenciando, obtenemos

$$\frac{dE}{E} = \frac{p^2}{m_0^2c^2 + p^2}\,\frac{dp}{p}.$$

A altas energías, cuando p es mucho mayor que m_0c, obtenemos $dE/E \approx dp/p$, y el momentum aumenta en la misma proporción que la energía.

EJEMPLO 11.5. Movimiento curvilíneo bajo fuerza constante en dinámica relativista.

Solución: En mecánica no relativista este movimiento corresponde a una trayectoria parabólica, tal como sucede con un proyectil (recordar la sección 5.7). Para resolver este problema en mecánica relativista, es más fácil usar las relaciones de energía y de momentum. Supongamos que para $t = 0$ la partícula está en O (Fig. 11-6), moviéndose a lo largo del eje X con momentum p_0, mientras que la fuerza $\boldsymbol{F}$ es perpendicular a él (o a lo largo del eje Y). La ecuación del movimiento $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$, expresada en términos de sus componentes a lo largo de los ejes X e Y viene a ser

$$\frac{dp_x}{dt} = 0, \qquad \frac{dp_y}{dt} = F.$$

Integrando cada una de esas expresiones, obtenemos $p_x = p_0$ (const), $p_y = Ft$. Por tanto el momentum total después del tiempo t, cuando la partícula ha alcanzado el punto A, es

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \sqrt{p_0^2 + F^2t^2},$$

y la energía total, usando la ec. (11.18), es

$$E = c\sqrt{m_0^2c^2 + p_0^2 + F^2t^2} = \sqrt{E_0^2 + c^2F^2t^2},$$

donde $E_0 = c\sqrt{m_0^2c^2 + p_0^2}$ es la energía total para $t = 0$. Por consiguiente, las componentes de la velocidad, usando la relación vectorial $\boldsymbol{v} = c^2\boldsymbol{p}/E$, son

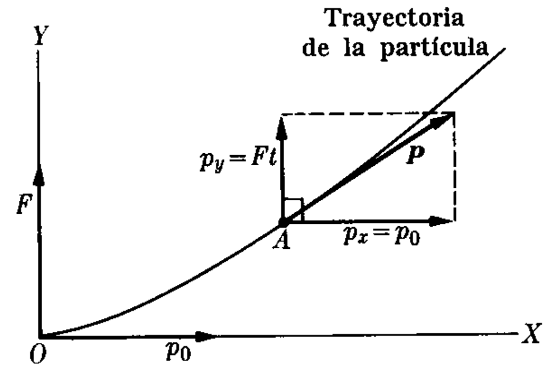

Fig. 11-6. Movimiento relativista curvilíneo bajo fuerza constante.

$$v_x = \frac{c^2p_x}{E} = \frac{c^2p_0}{\sqrt{E_0^2 + c^2F^2t^2}}, \quad v_y = \frac{c^2p_y}{E} = \frac{c^2Ft}{\sqrt{E_0^2 + c^2F^2t^2}},$$

de donde puede obtenerse la magnitud de la velocidad. Integrando estas expresiones, las coordenadas x e y de la partícula pueden ser expresadas como función del tiempo. La trayectoria se obtiene de esas ecuaciones. Dejamos al estudiante el dar estos últimos pasos y comparar la trayectoria con la parábola no relativista (ver Problema 11.11).

11.7 *Transformación de energía y momentum*

De acuerdo al principio de relatividad, la ec. (11.18) que relaciona la energía y el momentum debe ser la misma para todos los observadores inerciales. Es por tanto importante comparar esas magnitudes medidas por dos observadores en movimiento relativo. Para el observador O, la ec. (11.18) puede ser escrita en la forma

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2c^2. \tag{11.22}$$

Recordemos que $\boldsymbol{p}$ es una magnitud vectorial con componentes p_x, p_y y p_z. Por tanto $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ y la ec. (11.22) viene a ser

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2c^2. \tag{11.23}$$

Para ser consistente con la suposición del principio de relatividad, esta expresión debe permanecer invariante para todos los observadores inerciales. Esto es, en otro sistema de referencia (observador O') moviéndose con velocidad v relativa al sistema original con respecto al cual se escribe la ec. (11.23), debemos tener

$$p_{x'}'^2 + p_{y'}'^2 + p_{z'}'^2 - \frac{E'^2}{c^2} = -m_0^2c^2, \tag{11.24}$$

donde m_0 permanece la misma ya que corresponde a la masa en reposo. En otras palabras, debemos tener

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \frac{E^2}{c^2} = p_{x'}'^2 + p_{y'}'^2 + p_{z'}'^2 - \frac{E'^2}{c^2}. \tag{11.25}$$

La estructura de las ecs. (11.23), (11.24) y (11.25) es similar a la de las ecs. (6.30) y (6.31) si hacemos la correspondencia

$$p_x \to x, \quad p_y \to y, \quad p_z \to z, \qquad \text{y} \qquad ct \to E/c.$$

Por tanto, la invariancia de la ec. (11.23) requiere una transformación entre sus elementos igual a la transformación de Lorentz para x, y, z y t. Esto conduce a

$$\begin{aligned} p'_{x'} &= \frac{p_x - vE/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ p'_{y'} &= p_y, \\ p'_{z'} &= p_z, \\ E' &= \frac{E - vp_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{11.26}$$

Este resultado, junto con la correspondiente expresión para la energía, prueba cómo nuestra definición de momentum dada en la ec. (11.8), satisface el primer requisito del principio especial de relatividad; vale decir, el momentum se transforma apropiadamente bajo una transformación de Lorentz.

Nótese que hemos hallado dos conjuntos de cantidades asociadas, esto es x, y, z, ct y p_x, p_y, p_z, E/c, que parecen transformarse entre sí siguiendo las reglas de la transformación de Lorentz. Indudablemente podemos esperar que otras cantidades físicas se transformen de manera similar. Una característica común de todos estos conjuntos de cantidades es que tienen cuatro "componentes"; esto es, son expresadas por cuatro números. Por tal razón se llaman *cuadrivectores*, y pueden imaginativamente ser representadas en un espacio cuadridimensional. Un método para adaptar las leyes físicas a los requisitos de invariancia del principio de relatividad consiste en escribirlas como relaciones entre escalares, cuadrivectores y otras cantidades parecidas (tensores). No nos detendremos en este asunto, ya que pertenece a una discusión más extensa de la teoría de la relatividad, más allá de la intención y alcance de este libro.

EJEMPLO 11.6. Expresar las relaciones inversas entre la energía y el momentum correspondientes a las ec. (11.26). Esto es, dar los valores medidos por O en términos de los valores medidos por O'.

Solución: Referimos al estudiante al ejemplo 6.4, que corresponde al problema equivalente para las coordenadas x, y, z y el tiempo t. Podemos así llegar al resultado deseado cambiando simplemente el signo de v e intercambiando las cantidades con prima y sin prima en las ecuaciones (11.26), obteniendo

$$
\begin{aligned}
p_x &= \frac{p'_{x'} + vE'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\
p_y &= p'_{y'}, \\
p_z &= p'_{z'}, \\
E &= \frac{E' + vp'_{x'}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.
\end{aligned}
\qquad (11.27)
$$

EJEMPLO 11.7. Aplicar los resultados del ejemplo anterior al caso en que la partícula está en reposo con relación a O'.

Solución: En este caso $p'_{x'} = p'_{y'} = p'_{z'} = 0$ y $E' = m_0c^2$. Por consiguiente las ecuaciones de transformación dan

$$p_x = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p_y = 0, \quad p_z = 0, \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Las tres primeras ecuaciones dan el momentum y la última la energía tales como son medidos por O. La comparación con la ec. (11.8) para el momentum y con la ec. (11.16) para la energía muestra que ellas corresponden exactamente al momentum y la energía de una partícula moviéndose a lo largo del eje X con velocidad v. Este es justamente el caso, ya que la partícula, estando en reposo con relación a O', debe parecer moverse con velocidad v respecto de O. El mérito de este ejemplo está en que las relaciones (11.26), y sus inversas (11.27), derivadas en forma algo intuitiva usando el principio de invariancia relativista, son compatibles con las expresiones anteriores para la energía y el momentum derivadas usando un punto de partida diferente. Este ejemplo muestra así la consistencia de nuestra lógica.

EJEMPLO 11.8. Discutir la transformación de energía y momentum para una partícula con masa de reposo nula. Por simplicidad suponer que el movimiento de la partícula tiene lugar a lo largo de la dirección del movimiento relativo de los observadores.

Solución: Ya que $m_0 = 0$, podemos suponer que la relación $E = cp$, de acuerdo con la ec. (11.21), es satisfactoria para el observador O. Entonces, usando las ec. (11.26), con $p'_{x'} = p'$ y $p_x = p$, ya que el movimiento es a lo largo del eje X, y usando $E = cp$, tenemos para el observador O',

$$p' = \frac{p - v(cp)/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = p\,\frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Usando este resultado para p', obtenemos para la energía

$$E' = \frac{cp - vp}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = cp\,\frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = cp'.$$

Por consiguiente la relación $E' = cp'$ también vale para el observador O'. Este ejemplo, como el anterior, indica al estudiante la consistencia de la teoría. Se sugiere que el estudiante repita el problema suponiendo que la partícula se mueve en una dirección arbitraria.

11.8 Transformación de la fuerza

La fuerza que actúa sobre la partícula medida por los observadores O y O' es, respectivamente,

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{F}' = \frac{d\boldsymbol{p}'}{dt'}, \tag{11.28}$$

tal como se requiere por el principio de relatividad, ya que ambos observadores deben usar las mismas ecuaciones del movimiento. La relación entre $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{F}'$ en general es algo complicada, pues no podemos usar un razonamiento tan simple como el usado para la energía y el momentum. Por tanto, computaremos esta relación sólo para el caso especial en que la partícula está momentáneamente en reposo en el sistema O'. Entonces $\boldsymbol{F}'$ se llama la *fuerza propia*.

Usando las ec. (11.26), obtenemos

$$F'_{x'} = \frac{dp'_{x'}}{dt'} = \frac{dt}{dt'}\frac{d}{dt}\left(\frac{p_x - vE/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)$$

$$= \frac{dt}{dt'}\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(\frac{dp_x}{dt} - \frac{v}{c^2}\frac{dE}{dt}\right). \tag{11.29}$$

Ahora de la transformación inversa de Lorentz (ver la última ecuación en el ejemplo 6.4), tenemos que

$$t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

y ya que $dx'/dt' = 0$, porque la partícula está en reposo con respecto a O',

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{11.30}$$

Por otra parte, de acuerdo a la definición de fuerza, $dp_x/dt = F_x$. De las definiciones de la energía E y de la energía cinética $E_k = E - m_0c^2$, como también del hecho de que el trabajo $F_x dx$ debe ser igual a dE_k, tenemos que

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_k}{dt} = \frac{F_x\, dx}{dt} = F_x v, \tag{11.31}$$

ya que en este caso $dx/dt = v$. Haciendo todas estas sustituciones en la ec. (11.29), obtenemos

$$F'_{x'} = F_x. \tag{11.32}$$

Para la componente paralela al eje Y, considerando que $F_y = dp_y/dt$, obtenemos

$$F'_{y'} = \frac{dp'_{y'}}{dt'} = \frac{dt}{dt'}\frac{dp_y}{dt} = \frac{F_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = kF_y. \tag{11.33}$$

Análogamente, para la componente Z, con $F_z = dp_z/dt$, tenemos

$$F'_{z'} = \frac{dp'_{z'}}{dt'} = \frac{F_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = kF_z, \qquad (11.34)$$

donde k se define como en la ec. (6.32). Las ec. (11.32), (11.33) y (11.34) relacionan la fuerza $\boldsymbol{F}$, medida por un observador en un sistema inercial y arbitrario de referencia, con la fuerza $\boldsymbol{F}'$ medida por un observador en un sistema inercial en el que la partícula está momentáneamente en reposo. El hecho de que la ley de transformación para la fuerza es diferente que para las magnitudes cuadrivectoriales momentum y energía, la coloca en una categoría diferente de ellas, ya que la fuerza no es parte de un cuadrivector. También la convierte en un concepto menos útil, en la teoría de la relatividad, que los de momentum y energía. Consecuentemente se ha propuesto una diferente definición de fuerza. No la discutiremos aquí, excepto para decir que tiene la ventaja de transformarse como un cuadrivector. Sin embargo, aun si la fuerza se transforma de manera diferente al momentum y energía, su transformación garantiza que la ecuación del movimiento, $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$, sea invariante para todos los observadores inerciales, lo cual constituye nuestro requisito fundamental. La relación entre las fuerzas $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{F}'$ ha sido indicada en la Fig. 11-7.

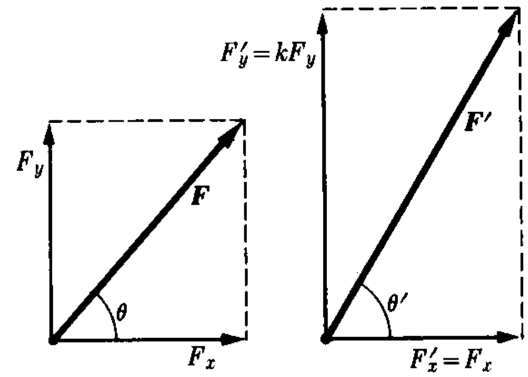

Fig. 11-7. Transformación de Lorentz de las componentes de una fuerza.

11.9 Sistemas de partículas

Consideremos un sistema de partículas, cada una de momentum $\boldsymbol{p}_i$ y energía E_i. Despreciando sus interacciones, podemos escribir el momentum total del sistema como $\boldsymbol{P} = \Sigma_i \boldsymbol{p}_i$ y la energía total como

$$E = \Sigma_i E_i = \Sigma_i m_i c^2 = Mc^2.$$

Por tanto, usando la ec. (11.17), podemos asociar al sistema una velocidad definida por

$$\boldsymbol{v}_C = \frac{c^2 \boldsymbol{P}}{E} = \frac{\boldsymbol{P}}{M}. \qquad (11.35)$$

Recordando la sección 9.2, podríamos decir que ésa es la velocidad del centro de masa del sistema y considerar que el sistema se comporta como un cuerpo de masa M moviéndose con velocidad $\boldsymbol{v}_C$. Recordamos al estudiante, sin embargo, que (por las razones dadas en la sección 9.2) cuando la masa depende de la velocidad no podemos definir el centro de masa. Por tanto, llamaremos a la velocidad dada por la ec. (11.35) la *velocidad del sistema*.

Supongamos que tenemos dos observadores inerciales diferentes, cada uno examinando el sistema de partículas. Respecto al observador O el momentum y la energía total son $\boldsymbol{P} = \Sigma_i \boldsymbol{p}_i$ y $E = \Sigma_i E_i$. Con relación a O', tales magnitudes son $\boldsymbol{P}' = \Sigma_i \boldsymbol{p}'_i$ y $E' = \Sigma_i E'_i$. Si la velocidad de O' relativa a O es v, a lo largo del eje X, cada E_i y $\boldsymbol{p}_i$ se transforma en E'_i y $\boldsymbol{p}'_i$ de acuerdo a las ecs. (11.26). Es claro que sus sumas se transforman de la misma manera, y podemos así escribir

$$\begin{aligned} P'_{x'} &= \frac{P_x - vE/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ P'_{y'} &= P_y, \\ P'_{z'} &= P_z, \\ E' &= \frac{E - vP_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{11.36}$$

Ahora si, con relación a O, el momentum y la energía se conservan, $\boldsymbol{P} = \text{const}$, y $E = \text{const}$, y entonces las transformaciones anteriores implican $\boldsymbol{P}' = \text{const.}$ y $E' = \text{const}$, y las dos leyes de conservación son también satisfactorias para O'. Hemos verificado, por consiguiente, el segundo requisito exigido por nuestra teoría, tal como se indicó al final de la sección 11.4. Notamos también que, debido a la estructura de las ecuaciones de transformación, las dos leyes de conservación deben ser satisfechas simultáneamente; en otras palabras, no pueden ser independientes una de la otra. Esta situación no ocurre en el caso no relativista.

Consideremos ahora el caso especial en que la velocidad relativa de los dos observadores es paralela al momentum total $\boldsymbol{P}$. Entonces $P_x = P$, $P_y = P_z = 0$, y la primera de las ec. (11.36) se reduce a

$$P' = \frac{P - vE/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Por analogía con los sistemas de referencia L y C introducidos en el capítulo 9.

> *definimos el sistema-C en mecánica relativista como el sistema de referencia en el que el momentum total del sistema es cero.*

Por tanto, si el observador O' está en reposo con relación al sistema-C, el momentum P' es cero. Si ponemos $P' = 0$ en la expresión anterior, la velocidad de O' relativa a O (que usa el sistema de referencia L), es $v = c^2P/E$. La comparación con la ec. (11.35) muestra que el sistema-C se mueve con la velocidad del sistema $\boldsymbol{v}_C$ relativa al sistema-L. Este es el mismo resultado obtenido en la situación no relativista del capítulo 9.

Indicamos al comienzo de esta sección que estábamos despreciando interacciones entre las partículas del sistema. La consideración de las interacciones que dependen de la posición relativa de las partículas introduce serias dificultades en la teoría de la relatividad. Por ejemplo, vimos en el capítulo 6 que el concepto de la simultaneidad en la posición de dos partículas, que es requerido para definir una interacción, no es un concepto invariante. Por tanto la velocidad de trasmisión de la interacción debe ser tomada en cuenta. Por tal razón, se necesita técnicas especiales para discutir las interacciones en una forma consistente con la teoría de la relatividad.

EJEMPLO 11.9. Discutir el sistema de referencia C para dos partículas idénticas que se mueven en la misma dirección.

Solución: Las propiedades del sistema-C pueden ser fácilmente discutidas para el caso de dos partículas. Consideremos un sistema de dos partículas idénticas que, con respecto al observador O, parece que se mueven a lo largo del eje X en el sistema-L (usado por O) con velocidades v_1 y v_2. Sus respectivas masas con m_1 y m_2, computadas de acuerdo a la ec. (11.7), con el mismo valor de m_0 para ambas. El momentum total en el sistema-L es

$$P = p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2. \tag{11.37}$$

Con relación al sistema-C el momentum total del sistema es cero. Por tanto,

$$P' = p_1' + p_2' = 0.$$

Ello requiere que el momentum de las dos partículas en el sistema-C sea el mismo en magnitud, pero que las partículas se muevan en direcciones opuestas. Entonces la ec. (11.8) requiere que las magnitudes de las velocidades en el sistema-C sean las mismas. Por tanto, las partículas parecen estar moviéndose con velocidades v' y $-v'$. Designando las velocidades del sistema-C relativa al sistema-L por v_C y usando la ecuación (6.38) para la transformación de velocidades, con v reemplazada por v_C, tenemos

$$v_1 = \frac{v' + v_C}{1 + v'v_C/c^2}, \qquad v_2 = \frac{-v' + v_C}{1 - v'v_C/c^2}.$$

que pueden ser escritas en las formas alternativas:

$$v_1 = v_C + \frac{v'(1 - v_C^2/c^2)}{1 + v'v_C/c^2}, \qquad v_2 = v_C - \frac{v'(1 - v_C^2/c^2)}{1 - v'v_C/c^2}.$$

Podemos obtener el momentum total en el sistema-L sustituyendo dichos valores en la ec. (11.37). Ello da

$$P = (m_1 + m_2)v_C + v'(1 - v_C^2/c^2)\left(\frac{m_1}{1 + v'v_C/c^2} - \frac{m_2}{1 - v'v_C/c^2}\right). \tag{11.38}$$

Reemplazando m_1 y m_2 en el último término por sus valores de acuerdo con la ecuación (11.7), obtenemos

$$m_0 v'(1 - v_C^2/c^2)\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}\,(1 + v'v_C/c^2)} - \frac{1}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}\,(1 - v'v_C/c^2)}\right).$$

Usando las identidades del Problema 6.38, podemos simplificar cada término dentro del paréntesis. Puede verse que ambos términos son iguales a $1/\sqrt{(1 - v_C^2/c^2)(1 - v'^2/c^2)}$ y, por tanto, que su diferencia es cero. Por consiguiente, el último término en la ec. (11.38) desaparece, y P se reduce a

$$P = (m_1 + m_2)v_C \qquad \text{y} \qquad v_C = P/M.$$

Esta es justamente la ec. (11.35) adaptada al caso particular de dos partículas moviéndose en la misma dirección. Por consiguiente, verificamos que en la teoría de la relatividad, tanto como en la teoría clásica, el sistema-C (relativo al cual el momentum total del sistema es cero) está moviéndose con respecto al sistema-L con una velocidad v_C dada por la ec. (11.35).

11.10 Colisiones de alta energía

Los principios de conservación de la energía y el momentum deben ser satisfechos por cualquier colisión, no importando la energía de las partículas. En la sección 9.7 este asunto fue discutido para la región de bajas energías (no relativista). Sin embargo, a altas energías, los conceptos y técnicas desarrollados en el presente capítulo deben ser usados. Consideremos, por ejemplo, dos partículas cuyas masas en *reposo* sean m_1 y m_2, moviéndose antes de la colisión con momenta $\boldsymbol{p}_1$ y $\boldsymbol{p}_2$ relativos a algún sistema inercial de referencia. La interacción entre las partículas es apreciable solamente durante el pequeño intervalo en el que las partículas se hallan próximas una de otra (esto corresponde a la zona sombreada en la Fig. 9-11). Recordar que en la sección 9.7 una colisión fue definida como habiendo ocurrido si es que la interacción produce cambios medibles en un tiempo relativamente corto y sobre una distancia relativamente pequeña. Supongamos que después de la colisión, cuando la interacción es nuevamente despreciable, las partículas resultantes tengan masas de reposo m_3 y m_4 y se muevan con momenta $\boldsymbol{p}_3$ y $\boldsymbol{p}_4$ con respecto al sistema inercial de referencia original. La conservación del momentum y de la energía está expresada por

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_3 + \boldsymbol{p}_4 \quad \text{y} \quad E_1 + E_2 = E_3 + E_4, \tag{11.39}$$

o, usando la ec. (11.18), tenemos

$$c\sqrt{m_1^2c^2 + p_1^2} + c\sqrt{m_2^2c^2 + p_2^2} = c\sqrt{m_3^2c^2 + p_3^2} + c\sqrt{m_4^2c^2 + p_4^2}. \tag{11.40}$$

La colisión descrita por las ec. (11.39) y (11.40) puede ser indicada esquemáticamente por $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$. La aplicación de las ecs. (11.39) y (11.40) es en general complicada algebraicamente por la presencia de los radicales en la ec. (11.40), y por tal razón ilustraremos su uso solamente en algunos casos simples pero importantes.

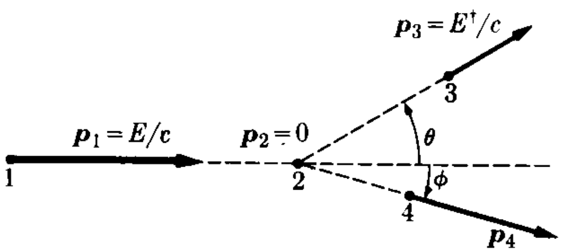

Fig. 11-8. Colisión de alta energía.

EJEMPLO 11.10. Discutir una colisión relativista cuando la partícula 1 (llamada la partícula incidente) tiene masa de reposo nula y es idéntica a la partícula 3, y la partícula 2 está en reposo en el sistema-L y es idéntica a la partícula 4.

Solución: El proceso está mostrado en la Fig. 11-8. Usando las ec. (11.18) y (11.21), obtenemos los valores de la energía y del momentum relativos al observador O

$$p_1 = E/c, \qquad p_2 = 0, \qquad p_3 = E^\dagger/c, \qquad p_4,$$
$$E_1 = E, \qquad E_2 = m_0c^2, \qquad E_3 = E^\dagger, \qquad E_4 = c\sqrt{m^2c^2 + p_4^2}.$$

La conservación del momentum es

$$\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_3 + \boldsymbol{p}_4, \tag{11.41}$$

y la conservación de la energía es

$$E + m_0c^2 = E^\dagger + c\sqrt{m_0^2c^2 + p_4^2}. \tag{11.42}$$

Supongamos que estemos interesados en la energía $E^\dagger$ de la partícula incidente después del choque. Debemos entonces eliminar $\boldsymbol{p}_4$ de las ecuaciones anteriores. Despejando $\boldsymbol{p}_4$ de la ec. (11.41), obtenemos $\boldsymbol{p}_4 = \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_3$. Elevando al cuadrado, tenemos

$$p_4^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_3.$$

Usando los valores correspondientes de los momenta, tenemos

$$p_4^2 = \frac{E^2}{c^2} + \frac{E^{\dagger 2}}{c^2} - \frac{2EE^\dagger}{c^2}\cos\theta.$$

Despejando p_4^2 de la ec. (11.42)

$$p_4^2 = \frac{1}{c^2}(E + m_0c^2 - E^\dagger)^2 - m_0^2c^2$$
$$= \frac{E^2}{c^2} + \frac{E^{\dagger 2}}{c^2} + \frac{2(E - E^\dagger)\,m_0c^2}{c^2} - \frac{2EE^\dagger}{c^2}.$$

Igualando ambos resultados para p_4^2, obtenemos

$$\frac{2(E - E^\dagger)m_0c^2}{c^2} - \frac{2EE^\dagger}{c^2} = -\frac{2EE^\dagger}{c^2}\cos\theta$$

o sea

$$E - E^\dagger = \frac{EE^\dagger}{m_0c^2}(1 - \cos\theta).$$

Dividiendo ambos lados por $EE^\dagger$ se obtiene

$$\frac{1}{E^\dagger} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m_0c^2}(1 - \cos\theta). \tag{11.43}$$

Esta expresión da $E^\dagger$ en términos de E y el ángulo de dispersión θ de la partícula 3. Nótese que siempre $E > E^\dagger$, y que por tanto la partícula incidente pierde energía, como debería ser, ya que la otra partícula, inicialmente en reposo, está en movimiento después de la colisión.

El resultado (11.43) es muy importante en la discusión de la dispersión de la luz (fotones) debida a electrones libres — el llamado efecto Compton — que será discutido con gran detalle en el capítulo 19 del segundo volumen. Nótese que la ec. (11.43) no puede ser satisfecha por $E^\dagger = 0$ para ningún ángulo de dispersión. Por consiguiente, es imposible que la energía de la partícula incidente sea completamente absorbida por una partícula libre.

EJEMPLO 11.11. En la mayoría de los experimentos de alta energía, una partícula incidente muy rápida choca con otra en reposo en el sistema-L. Deseamos conocer la *energía umbral;* esto es, la energía cinética mínima de la partícula en el laboratorio o sistema-L que es necesaria para producir cierta reacción. Obtener la ecuación para la energía umbral necesaria para la creación de un par protón-antiprotón en un choque protón-protón.

Solución: En este momento es suficiente decir que un antiprotón es una partícula de masa igual a la del protón y cuya carga eléctrica es igual, en valor absoluto, a la del protón, pero negativa. Designamos el protón por p^+ y el antiprotón por p^-. Parte de la energía cinética del protón rápido que choca con otro protón en reposo en el laboratorio es usada para producir un par protón-antiprotón, par p^+, p^-. Podemos representar el proceso esquemáticamente así

$$\mathrm{p}^+ + \mathrm{p}^+ \rightarrow \mathrm{p}^+ + \mathrm{p}^+ + \mathrm{p}^+ + \mathrm{p}^-.$$

Los dos protones a la izquierda y los primeros dos a la derecha de la ecuación representan los protones incidente y blanco. Los dos últimos corresponden al resultado del choque : el par protón-antiprotón. (Nótese que aunque el número de partículas ha cambiado, la carga total pesmanece igual. Como veremos después, éste es un ejemplo de otro principio de conservación : el principio de conservación de la carga). Inicialmente uno de los protones está en reposo (momentum cero) en el sistema-L y el otro está moviéndose hacia él con momentum $\boldsymbol{p}$.

Antes de la colisión, el momentum total relativo al observador O en el sistema-L es $\boldsymbol{p}$ y la energía total es $E = c\sqrt{m_0^2c^2 + p^2} + m_0c^2$. Después de la colisión, el momentum total debe ser todavía $\boldsymbol{p}$ y la energía total, E. La energía mínima que requiere la partícula incidente es aquella necesaria para que los productos finales estén en reposo relativo al sistema-C, el que se está moviendo con la velocidad del sistema relativa a L (ver sección 11.9). Los productos no pueden estar en reposo relativo al sistema-L a causa de la conservación del momentum. Pero en este caso la energía total relativa al sistema-C es $E' = 4m_0c^2$, y el momentum total es $\boldsymbol{p}' = 0$. Ello significa que las cuatro partículas resultantes vistas desde el sistema-L parecen estar moviéndose juntas con la misma velocidad, y para poder garantizar la conservación del momentum, cada una de ellas debe tener un momentum igual a $\frac{1}{4}\boldsymbol{p}$. Por tanto, su energía total relativa a O es $4c\sqrt{m_0^2c^2 + (p/4)^2}$ ó $c\sqrt{16m_0^2c^2 + p^2}$. Igualando las energías antes y después del choque, tenemos

$$c\sqrt{m_0^2c^2 + p^2} + m_0c^2 = c\sqrt{16m_0^2c^2 + p^2}.$$

Esta es una ecuación algebraica en p cuya solución es $p = 4\sqrt{3}\,m_0c$, la cual da así el momentum mínimo que debe tener el protón incidente con respecto a O para que la reacción se lleve a cabo. (¿Cuál es la velocidad de este protón?). Consecuentemente, la energía total del protón incidente relativa a O es $c\sqrt{m_0^2c^2 + p^2} = 7m_0c^2$ y su energía cinética será $6m_0c^2$.

Por tanto, para que la reacción que estamos considerando pueda ocurrir en el laboratorio, el protón incidente debe ser acelerado hasta que su energía cinética en el sistema-L sea $6m_0c^2$. La masa de reposo del protón tiene el valor $m_0 = 1{,}67 \times \times 10^{-27}$ kg. Entonces la energía $6m_0c^2$ es equivalente a $9{,}0 \times 10^{-10}$ J o sea alrededor de $5{,}6 \times 10^9$ eV.

Uno de los principales usos de los aceleradores de alta energía es producir partículas rápidas por encima de los umbrales de energía cinética en el sistema-L de tal modo que los científicos puedan producir en el laboratorio, bajo condiciones controladas, algunos de los procesos que se han observado en los rayos cósmicos.

EJEMPLO 11.12. Obtener la energía de umbral para la reacción $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$, en la cual las cuatro partículas son diferentes.

Solución: Ya que las partículas tienen diferentes masas, no podemos usar los principios de simetría empleados implícitamente en nuestro ejemplo anterior. Supongamos que la partícula 2 está en reposo en el laboratorio, de tal modo que $p_2 = 0$. La energía de cada partícula en el sistema-L antes de la colisión es entonces

$$E_1 = c\sqrt{m_1^2c^2 + p_1^2} \qquad \text{y} \qquad E_2 = m_2c^2. \tag{11.44}$$

La energía y el momentum totales del sistema en el laboratorio son

$$E = E_1 + m_2c^2, \qquad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1. \tag{11.45}$$

Las cantidades E y $\boldsymbol{P}$ deben transformarse de un sistema inercial de referencia a otro de acuerdo con las ec. (11.26) lo que implica que la expresión $P^2 - E^2/c^2$ debe permanecer invariante. Entonces

$$P^2 - E^2/c^2 = P'^2 - E'^2/c^2.$$

Si transformamos al sistema-C debemos tener $\boldsymbol{P}' = 0$, ya que el momentum total es cero en este sistema de referencia. Entonces $P^2 - E^2/c^2 = -E'^2/c^2$ o sea que la energía total E' en el sistema C, de acuerdo a la ec. (11.45), es

$$E' = \sqrt{E^2 - c^2P^2} = \sqrt{(E_1 + m_2c^2)^2 - c^2p_1^2}.$$

Usando el valor de E_1 dado por la ec. (11.44), tenemos

$$E' = c\sqrt{(m_1^2 + m_2^2)c^2 + 2E_1m_2}. \tag{11.46}$$

Recordando de la ec. (11.16) que $E_1 = E_{k_1} + m_1c^2$, donde E_{k_1} es la energía cinética de la partícula 1 en el laboratorio, tenemos

$$\begin{aligned} E' &= c\sqrt{(m_1^2 + m_2^2)c^2 + 2(E_{k_1} + m_1c^2)m_2} \\ &= c\sqrt{(m_1 + m_2)^2c^2 + 2E_{k_1}m_2}. \end{aligned} \tag{11.47}$$

La energía mínima requerida para producir las partículas m_3 y m_4 después de la reacción es aquella energía para la cual las partículas resultantes están en reposo en el sistema-C. En el sistema-L es imposible para ambas partículas estar en reposo al mismo tiempo debido a la conservación del momentum. En este caso $E_3' = m_3c^2$ y $E_4' = m_4c^2$ y la energía después del choque es $E' = (m_3 + m_4)c^2$. Igualando este resultado con la ec. (11.47), que da la energía total en el sistema-C antes de la colisión, tenemos

$$c\sqrt{(m_1 + m_2)^2c^2 + 2E_{k_1}m_2} = (m_3 + m_4)c^2$$

o sea, despejando E_{k_1}

$$\begin{aligned} E_{k_1} &= \frac{c^2}{2m_2}\left[(m_3 + m_4)^2 - (m_1 + m_2)^2\right] \\ &= \frac{c^2}{2m_2}\left[(m_3 + m_4) - (m_1 + m_2)\right]\left[(m_3 + m_4) + (m_1 + m_2)\right]. \end{aligned}$$

El valor-Q de esta reacción (recordar la ec. (9.41) para colisiones newtonianas) está definido por

$$Q = [(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)]c^2, \tag{11.48}$$

que es igual a la diferencia entre las energías en reposo inicial y final. Entonces la expresión para E_{k_1} se transforma en

$$E_{k_1} = -\frac{Q}{2m_2}(m_1 + m_2 + m_3 + m_4), \tag{11.49}$$

que da el umbral de la energía cinética para la partícula 1 (la partícula incidente) en el sistema-L. Si Q es positiva, entonces E_{k_1} es negativa y la reacción ocurre sin importar cuál sea la energía cinética de la partícula incidente. Ello es debido al hecho que las partículas iniciales tienen una energía de reposo mayor que la necesaria para producir las partículas finales que también están en reposo. Pero si Q es negativa, E_{k_1} es positiva y la partícula incidente debe entonces tener una cierta energía cinética mínima, ya que las energías en reposo de las partículas incidentes no son suficientes para producir las partículas finales.

Bibliografía

1. "On the Origins of the Special Theory of Relativity", G. Holton. *Am. J. Phys.* **28,** 627 (1960)
2. "Henri Poincaré and the Principle of Relativity", C. Scribner. *Am. J. Phys.* **32,** 672 (1964)
3. "Speed and Kinetic Energy of Relativistic Electrons", W. Bertozzi. *Am. J. Phys.* **32,** 551 (1964)
4. "Massless Particles", R. Good. *Am. J. Phys.* **28,** 679 (1960)
5. "*An Introduction to the Special Theory of Relativity*, R. Katz. Princeton, N. J. : Momentum Books, D. Van Nostrand Co., 1964
6. *The Special Theory of Relativity*, D. Bohm. New York : W. A. Benjamin, 1964
7. *Introductory Mechanics*, E. Taylor. New York : John Wiley & Sons, 1963, caps. 11, 12 y 13
8. *The Feynman Lectures on Physics*, vol. I, R. Feynman, R. Leighton y M. Sands. Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1963, caps. 15, 16 y 17

Problemas

11.1 Suponer que E y E' son los valores de la energía total de un sistema de dos partículas interactuantes medidas por dos observadores inerciales O y O' moviéndose con velocidad relativa v. Probar que

$$E = E' + (m_1 + m_2)(\boldsymbol{v}'_{\mathrm{CM}} \cdot \boldsymbol{v} + \tfrac{1}{2}v^2).$$

Comparar con los resultados dados en el capítulo 9. Suponer que todas las energías son suficientemente bajas para usar la dinámica newtoniana.

11.2 Comparar las ecuaciones no relativistas del movimiento de una partícula tal como son determinadas por un observador inercial O y por otro O' rotando con relación al primero con velocidad angular constante. Discutir las fuerzas inerciales observadas por O'. (Sugerencias : revisar la sección 6.4).

11.3 ¿A qué velocidad el momentum de una partícula es igual a m_0c? ¿Cuáles son la energía total y la energía cinética en este caso?

11.4 Un electrón se mueve en una trayectoria circular de radio 2×10^{-2} m de modo que su velocidad es $(0{,}5 + 0{,}01\, t)c$. Hallar el ángulo entre la fuerza y la aceleración cuando $t = 10$ s.

11.5 Una partícula con masa en reposo m_0 y una velocidad 0,8 c está sujeta a una fuerza que es (a) paralela a la velocidad, (b) perpendicular a la velocidad. Determinar la razón de la fuerza a la aceleración en cada caso. Asimismo en el segundo caso, hallar el radio de curvatura y compararlo con valores no relativistas.

11.6 La masa de reposo de un electrón es $9{,}109 \times 10^{-31}$ kg y la de un protón

1,675 × 10^{-27} kg. Computar sus energías en joules y en eV.

11.7 Hallar el momentum y la velocidad de salida de un protón del acelerador de Brookhaven si la energía cinética del protón es 3 × 10^{10} eV.

11.8 El radio de una trayectoria protónica en el acelerador de Brookhaven es 114 m. Hallar la fuerza centrípeta requerida para mantenerlo en órbita cuando ha alcanzado su energía cinética final.

11.9 Un electrón tiene una velocidad de 0,8c. Hallar la velocidad de un protón que tenga (a) el mismo momentum, (b) la misma energía cinética.

11.10 Estimar el valor del término correctivo $\frac{3}{8}m_0v^4/c^2$ con respecto al primer término de la ecuación (11.19) para (a) un electrón de un átomo de hidrógeno cuya velocidad es 2,2 × 10^6 m s^{-1}, (b) un protón procedente de un ciclotrón con una energía cinética de 30 MeV, (c) protones procedentes del acelerador de Brookhaven con una energía cinética de 3 × 10^{10} eV.

11.11 Completar el ejemplo 11.5 obteniendo las coordenadas de la partícula en función del tiempo y comparar con los valores no relativistas. Demostrar también que la ecuación de la trayectoria es

$$y = \frac{E_0}{F}\cosh\frac{Fx}{p_0c}.$$

11.12 Un acelerador produce protones con una velocidad de 0,9c a razón de 3 × 10^{18} partículas por segundo en ráfagas que duran 10^{-5} seg. cada una. Hallar la energía total necesaria para acelerar todas las partículas en una ráfaga. Si hay 100 ráfagas por segundo, calcular la potencia requerida para acelerar las partículas.

11.13 Calcular en eV, la energía requerida para acelerar un electrón y un protón desde (a) el reposo hasta 0,500c, (b) 0,500c hasta 0,900c, (c) 0,900c hasta 0,950c, (d) de 0,950 hasta 0,990c. ¿Qué conclusión general obtiene Ud?

11.14 La energía cinética de una cierta partícula puede ser escrita como pc con un error en la energía total no mayor de 1 %. ¿Cuál es su mínima velocidad? ¿Cuál es la energía cinética, en eV, de un electrón y de un protón moviéndose a tal velocidad?

11.15 ¿Qué velocidad máxima debe tener una partícula cuya energía cinética es escrita como $\frac{1}{2}mv^2$ con un error no mayor de 1 %? ¿Cuál es la energía cinética, en eV, de un electrón y un protón moviéndose a tal velocidad?

11.16 Demostrar que $v/c = [1 - (m_0c^2/E)^2]^{1/2}$. Con esta relación, hallar la velocidad de una partícula cuando E es (a) igual a su energía de reposo, (b) el doble de su energía de reposo, (c) 10 veces su energía de reposo y (d) mil veces su energía de reposo. Computar las correspondientes energías en eV para un electrón y un protón. Representar v/c versus E/m_0c^2.

11.17 Probar que el momentum de una partícula puede ser escrito como

$$p = (E_k^2 + 2m_0c^2E_k)^{1/2}/c.$$

Representar p/m_0c como función de E_k/m_0c^2.

11.18 Se aceleran electrones hasta una energía cinética de 10^9 eV. Hallar (a) la razón de su masa a su masa en reposo, (b) la razón de su velocidad a la velocidad de la luz, (c) la razón de su energía total a su energía de reposo. Repetir el problema para protones de la misma energía.

11.19 Dado que energía/velocidad tiene las mismas dimensiones que momentum, la unidad MeV/c ha sido introducida como una unidad conveniente para medir el momentum de las partículas elementales. Expresar el valor de esta unidad en m kg s^{-1}. Hallar, en términos de esta unidad, el momentum de un electrón con energía total de 5,0 MeV. Repetir para un protón con energía total de 2 × 10^3 MeV.

11.20 Determinar la energía total y la velocidad de un electrón que tiene un momentum de 0,60 MeV/c. Repetir para un protón.

11.21 Un electrón se mueve con una velocidad de 0,6c con respecto a un observador O. Se le aplica una fuerza de $9{,}109 \times 10^{-19}$ N (medida en el sistema de referencia ligado al electrón) paralelamente a la velocidad relativa. Hallar la aceleración del electrón con respecto a ambos sistemas de referencia.

11.22 Resolver el Problema 11.21 para el caso en que la fuerza es aplicada perpendicularmente a la velocidad relativa.

11.23 Resolver los Problemas 11.21 y 11.22 para el caso en que el valor de la fuerza es el relativo al observador O.

11.24. Calcular el momentum, energía total y energía cinética de un protón que se mueve con una velocidad $v = 0{,}99c$ con respecto al laboratorio en los siguientes casos : (a) en el sistema-L, (b) en el sistema definido por el protón, (c) en el sistema-C definido por el protón y un átomo de helio en reposo en el laboratorio.

11.25. Un protón con una energía cinética de 10^{10} eV choca con un protón en reposo. Hallar (a) la velocidad del sistema, (b) el momentum total y la energía total en el sistema-L, (c) la energía cinética de las dos partículas en el sistema-C.

11.26 Un electrón con energía total E_e choca frontalmente con un protón en reposo. Si la energía del electrón es muy grande comparada con su energía de reposo, el electrón debe ser tratado relativísticamente pero si, por otra parte, es pequeña camparada con la energía en reposo del protón, el protón puede ser tratado no relativísticamente. Probar entonces que (a) el protón retrocede con una velocidad aproximadamente igual a $(2E_e/m_0c^2)c$, (b) la energía transferida del electrón al protón es $2E_e^2/m_0c^2$. Aplicar al caso en que los electrones tienen una energía cinética de 100 MeV. (Sugerencia : Para el electrón, $E = cp$, mientras que para el protón $E_k = p^2/2m$. Nótese también que si el protón se mueve hacia adelante, el electrón retrocede, de manera que la *dirección* de su movimiento se invierte).

11.27 Un método para obtener la energía necesaria para una reacción nuclear consiste en hacer chocar dos partículas una contra otra. Cuando las partículas son idénticas y sus energías son las mismas, el sistema-C coincide con el laboratorio. Este método es usado en CERN donde los protones, acelerados hasta una energía de 28 GeV, se mantienen circulando en direcciones opuestas en dos « anillos de almacenamiento », hasta que en un momento dado se hace chocar los dos haces. (a) ¿Cuál es la energía total disponible para una reacción? (b) ¿Cuál es la energía cinética de uno de los protones en el sistema de referencia en el que otro protón está en reposo? Esta es la energía a la que debería ser acelerado un protón para producir la misma reacción chocando con un blanco en reposo en el laboratorio. ¿Ve Ud. alguna ventaja en la idea de los « anillos de almacenamiento »?

11.28 Obtener la ley relativista (11.26) para la transformación del momentum y la energía escribiendo $\boldsymbol{p}' = m_0\boldsymbol{V}'/\sqrt{1 - V'^2/c^2}$ y $E' = m/c^2/\sqrt{1 - V'^2/c^2}$, y expresando la velocidad $\boldsymbol{V}'$ en términos de la velocidad $\boldsymbol{V}$ medida por O y de la velocidad relativa $\boldsymbol{v}$, usando la ec. (6.36). [*Sugerencia:* Usar las relaciones obtenidas en el Problema 6.38].

11.29 Probar que la ley general para la transformación de fuerza cuando la partícula no está en reposo relativo a O' es

$$F'_x = F_x - \left(\frac{vV_y/c^2}{1 - vV_x/c^2}\right) F_y - \left(\frac{vV_z/c^2}{1 - vV_x/c^2}\right) F_z,$$

$$F'_y = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vV_x/c^2}\, F_y,$$

$$F'_z = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vV_x/c^2}\, F_z,$$

donde $\boldsymbol{V}$ se refiere a la velocidad de la partícula con respecto a O. Verificar que tales ecuaciones se reducen a las ec. (11.32), (11.33) y (11.34) si la partícula está en reposo con respecto a O'.

11.30 Probar que la transformación para la energía y el momentum puede ser escrita en la forma vectorial

$$p' = p - \frac{(p\cdot v)v}{v^2} + k\left[\frac{(p\cdot v)v}{v^2} - \frac{vE}{c^2}\right],$$

$$E' = k(E - v\cdot p).$$

11.31 Una partícula con masa en reposo m_1, moviéndose con velocidad v_1 en el sistema-L, choca con una partícula con masa en reposo m_2, inmóvil en el sistema-L. (a) Probar que la velocidad en el sistema-C del sistema compuesto por las dos partículas es

$$v_C = \frac{v_1}{1 + A\sqrt{1 - v_1^2/c^2}},$$

donde $A = m_2/m_1$. (b) Probar que en el sistema-C la velocidad de m_1 es

$$v_1^{\text{I}} = \frac{v_1 A\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}{1 - v_C^2/c^2 + A\sqrt{1 - v_C^2/c^2}}$$

y que la velocidad de m_2 *es* $-V_C$. (c) Computar los valores de las cantidades anteriores cuando v_1 es pequeña comparada con c, y comparar el resultado con el del ejemplo 9.13.

11.32 Usando las leyes de transformación de Lorentz para la energía y el momentum, probar que si $v_C = c^2P/E$ es la velocidad del sistema relativa a un observador O mientras que la velocidad del sistema para otro observador O', en movimiento con respecto a O con velocidad V a lo largo del eje X, es $v_C' = c^2P'/E'$, entonces v_C, v_C' y V están relacionadas por las ec. (6.36) para la transformación de velocidades. Probar también que si $v_C' = 0$ (o $P' = 0$), entonces $v_C = V$. Esta fue una de nuestras suposiciones básicas en la Sección 11.9 al definir la velocidad del sistema. Por tanto vemos que la teoría desarrollada es consistente con la transformación de Lorentz.

11.33 Una partícula con masa en reposo m' y momentum p_1 choca inelásticamente con una partícula de masa m_2 en reposo en el laboratorio. Las dos partículas se pegan sin cambiar la masa de reposo total. Hallar (a) la velocidad de la partícula resultante con respecto al sistema-L, (b) la Q de la colisión.

11.34 Discutir el Problema 11.33 para el caso en que la partícula resultante tenga una masa en reposo m_3 diferente de la masa en reposo combinada $m_1 + m_2$ de las dos partículas que chocaron.

11.35 Una partícula con masa en reposo m_1 y momentum p_1 choca inelásticamente con una partícula con masa en reposo m_2 estacionaria en el laboratorio. Los productos resultantes son una partícula con masa en reposo m_3 y una partícula con masa en reposo nula. Hallar la energía de la última (a) en el sistema-C, (b) en ei sistema-L.

11.36 Suponer que el ángulo de rebote de la partícula de masa m_0 en el ejemplo 11.10 es ϕ. Probar que la energía cinética de la partícula después de la colisión es

$$E_k = \frac{2E(E/m_0c^2)\cos^2\phi}{1 + 2(E/m_0c^2) + (E/m_0c^2)^2 \operatorname{sen}^2\phi}.$$

11.37 Una partícula con masa de reposo m_1 y momentum p_1 choca elásticamente con una partícula con masa m_2 en reposo en el sistema-L y se desvía un ángulo θ. Probar que la energía y el momentum de m_1 después del choque son

$$p_3 = p_1 \frac{(m_1^2c^2 + m_2E_1)\cos\theta + (E_1 + m_2c^2)\sqrt{m_2^2 - m_1^2\operatorname{sen}^2\theta}}{(E_1/c + m_2c)^2 - p_1^2\cos^2\theta},$$

$$E_3 = \frac{(E_1 + m_2c^2)(m_1^2c^2 + m_2E_1) + c^2p_1^2\cos\theta\sqrt{m_2^2 - m_1^2\operatorname{sen}^2\theta}}{(E_1/c + m_2c)^2 - p_1^2\cos^2\theta}.$$

11.38 Refiriéndose al Problema 11.37, probar que si la partícula m_2 rebota bajo un ángulo ϕ con respecto a la dirección del movimiento de la partícula incidente, su momentum y energía son

$$p_4 = p_1 \frac{2m_2(E_1 + m_2c^2)\cos\phi}{(E_1/c + m_2c)^2 - p_1^2\cos^2\phi},$$

$$E_4 = m_2c^2 \times \left[1 + \frac{2p_1^2\cos^2\phi}{(E_1/c + m_2c)^2 - p_1^2\cos^2\phi}\right].$$

11.39 Referirse nuevamente a los Problemas 11.37 y 11.38. Suponer que las dos partículas tienen la misma masa en reposo. Después del choque la partícula incidente se mueve en el sistema-C de referencia bajo un ángulo ϕ con respecto a la dirección inicial y que la otra partícula se mueve en la dirección opuesta. Probar que los ángulos θ y θ' bajo los que se mueven con respecto al sistema-L son

$$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{1 - v^2/c^2}\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\phi$$

y

$$\operatorname{tg}\theta' = \sqrt{1 - v^2/c^2}\,\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\phi.$$

Concluir de aquí que $\theta + \theta' \leq \frac{1}{2}\pi$ y que cuanto más cercana está v de c, tanto más pequeño será el ángulo $\theta + \theta'$ entre las dos partículas en el sistema-L. Comparar con los resultados del ejemplo 9.11 para una colisión no relativista. (*Sugerencia:* Notar que antes de la colisión las dos partículas se mueven en el sistema-C con velocidades v y $-v$ y que después de la colisión continúan moviéndose en direcciones opuestas con las mismas velocidades).

11.40 Refiriéndose al Problema 11.37, verificar que si la partícula 1 tiene masa de reposo nula, entonces los valores de p_3 y E_3 se reducen a los del ejemplo 11.10.

11.41 Probar que la ecuación del movimiento de un cohete desplazándose a velocidades relativistas y no sujeto a fuerza externa alguna, es $m\,dv/dm + v'_e(1 - v^2/c^2) = 0$, donde m es la masa instantánea en reposo del cohete, v su velocidad relativa al observador y v'_e la velocidad de escape relativa al cohete. Probar también, por integración, que la velocidad final está dada por

$$v = \frac{c[1 - (m/m_0)2v'_e/c]}{1 + (m/m_0)2v'_e/c}.$$

11.42 Una partícula con masa de reposo m_0 se divide (o desintegra) en otras dos partículas con masas en reposo m_1 y m_2. Probar que en el sistema-C las energías de las partículas resultantes son

$$E'_1 = (m_0^2 + m_1^2 - m_2^2)c^2/2m_0$$

y

$$E'_2 = (m_0^2 + m_2^2 - m_1^2)c^2/2m_0.$$

Hallar también sus momenta.

11.43 Resolver el Problema 11.42 para el caso de referir el movimiento de las partículas al sistema-L, suponiendo que el momentum de la partícula m_0 en este sistema es p. Probar también que si p_1 y p_2 son los momenta de las partículas resultantes y θ el ángulo entre ellas,

$$m_0^2c^4 = (m_1 + m_2)^2c^4 + 2E_1E_2 - 2m_1m_2c^4 - 2p_1p_2c^2\cos\theta.$$

11.44 En una colisión entre partículas m_1 y m_2, m_1 se mueve con momentum p_1 y m_2 está en reposo en el sistema-L. Después de la colisión, además de las partículas m_1 y m_2 aparecen las partículas m_3, m_4 .... Probar que el umbral de energía cinética en el sistema-L para este proceso es

$$E_{k_1} = (\Delta m)c^2[1 + m_1/m_2 + \Delta m/2m_2],$$

donde $\Delta m = m_3 + m_4 + \ldots (m_1 + m_2)$. Aplicar esta ecuación a la creación de un par protón-antiprotón, discutido en el ejemplo 11.11.

11.45 Una partícula con masa en reposo m_1, moviéndose con una energía total E_1 extremadamente grande, de modo que su velocidad es aproximadamente igual a c, choca con una partícula con masa en reposo m_2 que está inmóvil. Demostrar que la velocidad del sistema es $c(1 - m_2c^2/E_1)$ y que la energía disponible en el sistema C es

$$(2E_1m_2c^2)^{1/2}.$$

11.46 Considerar una reacción en la que una partícula con masa en reposo nula y energía E_1 choca con una partícula con masa en reposo m_2 inmóvil en el laboratorio. Los productos finales de la reacción son dos partículas: una con masa en reposo m_2 y otra con masa de reposo m_3. Demostrar que el umbral de energía E_1 para la reacción es

$$E_1 = m_3(1 + m_3/2m_2)c^2.$$

11.47 Determinar el valor Q y el umbral de energía cinética en el sistema-L de la partícula incidente (la π^-) para las siguientes reacciones: (a) $\pi^- + p^+ \rightarrow \rightarrow n + \pi^0$; (b) $\pi^- + p^+ \rightarrow \Sigma^- \rightarrow K^+$. Las masas en reposo de dichas partículas son

Partícula	Masa en reposo, kg
π^-	$0,2489 \times 10^{-27}$
π^0	$0,2407 \times 10^{-27}$
p^+	$1,6752 \times 10^{-27}$
n	$1,6748 \times 10^{-27}$
Σ^-	$1,9702 \times 10^{-27}$
K^+	$0,8805 \times 10^{-27}$

(*Sugerencia:* Usar los resultados del ejemplo 11.12.)

11.48 Una partícula elemental con masa en reposo m_0 se desintegra, dividiéndose en otras dos partículas elementales. El proceso tiene un valor Q no nulo. (a) Probar que si la partícula se divide en dos fragmentos iguales, ellos deben moverse en el sistema-C en direcciones opuestas con un momentum igual a

$$\tfrac{1}{2}(2m_0Q - Q^2/c^2)^{1/2}.$$

(b) Probar que si la partícula se desintegra en tres fragmentos iguales emitidos simétricamente en el sistema-C, el momentum de cada partícula es igual a

$$\tfrac{1}{3}(2m_0Q - Q^2/c^2)^{1/2}.$$

(c) Verificar que los resultados (a) y (b) se reducen, respectivamente, a las expresiones no relativistas dadas en las partes (d) y (e) del Problema 9.13 cuando Q es mucho menor que m_0c^2. (d) Aplicar el resultado de la parte (b) a la partícula elemental llamada *mesón-tau* ($m_0 = 8,8 \times \times 10^{-28}$ kg), que se desintegra en tres fragmentos llamados *mesones-pi* ($m_0 = = 2,5 \times 10^{-28}$ kg). Evaluar la Q del proceso y hallar la magnitud de las velocidades de los fragmentos en el sistema-C. ¿Qué tanto por ciento de error se obtiene si usamos las expresiones no relativistas del Problema 9.13?