

# DINAMICA DE UN CUERPO RIGIDO

*10.1 Introducción*

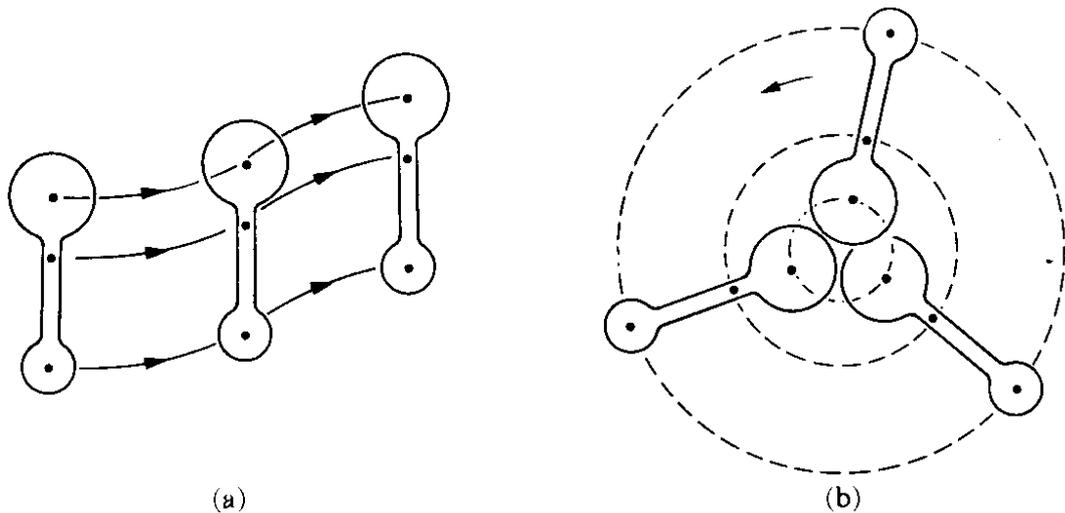
*10.2 Momentum angular de un cuerpo rígido*

*10.3 Cálculo del momento de inercia*

*10.4 Ecuación de movimiento de la rotación de un cuerpo rígido*

*10.5 Energía cinética de rotación*

*10.6 Movimiento giroscópico*

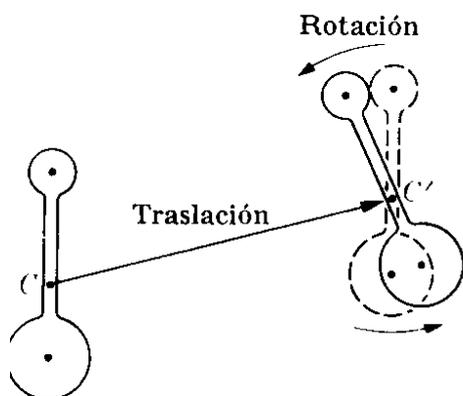


**Fig. 10-1.** (a) Movimiento de traslación de un cuerpo rígido. (b) Movimiento de rotación de un cuerpo rígido.

### 10.1 Introducción

Un cuerpo rígido es un caso especial e importante de los sistemas constituidos por muchas partículas, esto es, un cuerpo en el cual las distancias entre todos sus componentes permanecen constantes bajo la aplicación de una fuerza o momento. Un cuerpo rígido, por consiguiente, conserva su forma durante su movimiento.

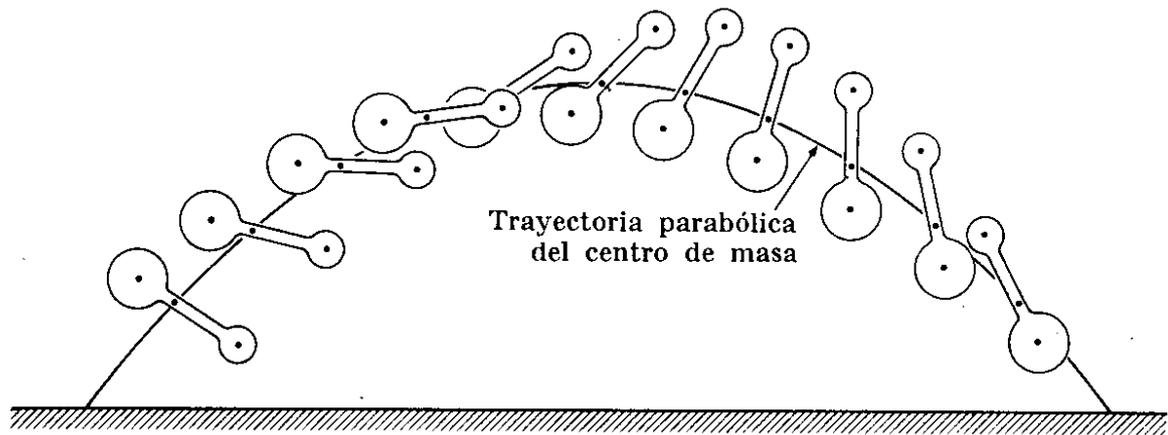
Podemos distinguir dos tipos de movimiento de un cuerpo rígido. El movimiento es de *traslación* cuando todas las partículas describen trayectorias paralelas de modo que las líneas que unen dos puntos cualesquiera del cuerpo permanecen siempre paralelas a su posición inicial (Fig. 10-1a). El movimiento es de *rotación* alrededor de un eje cuando todas las partículas describen trayectorias circulares alrededor de una línea denominada eje de rotación (Fig. 10-1b). El eje puede estar fijo o puede estar cambiando su dirección relativa con respecto al cuerpo durante el movimiento.



**Fig. 10-2.** Movimiento general de un cuerpo rígido.

El movimiento más general de un cuerpo rígido puede siempre considerarse como una combinación de una rotación y una traslación. Esto significa que siempre es posible encontrar un sistema de referencia en traslación pero no rotante en el cual el movimiento del cuerpo parezca solamente de rotación. Por ejemplo, el movimiento del cuerpo en la Fig. 10-2 que pasa de la posición 1 a la posición 2 puede considerarse como uno de traslación representado por el desplazamiento  $CC'$ , que une las dos posiciones del centro de masa, y uno de rotación alrededor de un eje a través del centro de masa  $C'$ .

De acuerdo a la ec. (9.9),  $M \, d\mathbf{v}_{\text{CM}}/dt = \mathbf{F}_{\text{ext}}$ , el movimiento del centro de masa es idéntico al movimiento de una partícula cuya masa es igual a la masa del



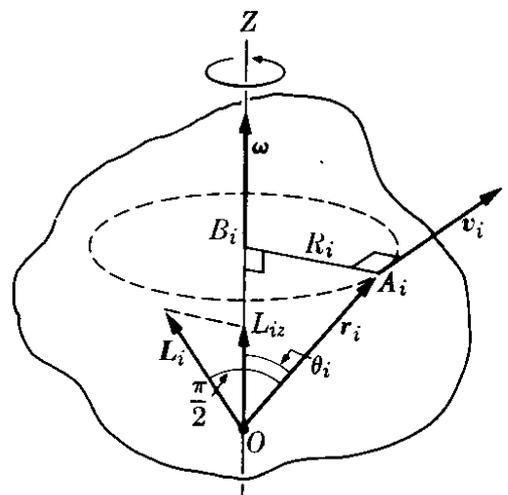
**Fig. 10-3.** Movimiento de un cuerpo rígido bajo la acción de la gravedad. El centro de masa describe la trayectoria parabólica correspondiente a una partícula de masa  $M$  bajo una fuerza  $Mg$ , mientras el cuerpo rota alrededor del cm. Como el peso está aplicado en el cm, su momento alrededor de dicho punto es cero y el momentum angular del cuerpo respecto del cm permanece constante durante el movimiento.

cuerpo y sobre la cual actúa una fuerza igual a la suma de todas las fuerzas externas aplicadas al cuerpo. Este movimiento puede analizarse de acuerdo a los métodos explicados en el capítulo 7 sobre la dinámica de una partícula, y por lo tanto no requiere de técnicas especiales. En este capítulo examinaremos el movimiento de rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje que pasa ya sea a través de un punto fijo en un sistema inercial o a través del centro de masa del cuerpo. En el primer caso, se utiliza para discutir el movimiento la ec. (9.19),  $d\mathbf{L}/dt = \boldsymbol{\tau}$  (donde  $\mathbf{L}$  y  $\boldsymbol{\tau}$  se calculan ambos con respecto al punto fijo), mientras que en el segundo caso, debe utilizarse la ec. (9.25)  $d\mathbf{L}_{CM}/dt = \boldsymbol{\tau}_{CM}$ .

## 10.2 Momentum angular de un cuerpo rígido

Consideremos un cuerpo rígido que rota alrededor de un eje  $Z$  con velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$  (Fig. 10-4). Cada una de sus partículas describe una órbita circular con centro en el eje  $Z$ . Por ejemplo, la partícula  $A_i$  describe un círculo de radio  $R_i = A_i B_i$  con una velocidad  $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$ , siendo  $\mathbf{r}_i$  el vector de posición con respecto al origen  $O$  (que se escogerá como un punto fijo de un sistema inercial o el centro de masa del cuerpo). La magnitud de la velocidad es  $v_i = \omega r_i \sin \theta_i = \omega R_i$ , en concordancia con la ec. (5.48). Nótese que escribimos  $\omega$  y no  $\omega_i$  ya que la velocidad angular es igual para todas las partículas de un cuerpo rígido. El momentum angular de una partícula  $A_i$  con respecto al origen  $O$  es

$$\mathbf{L}_i = m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i.$$



**Fig. 10-4.** Momentum angular de un cuerpo rígido rotante.

Su dirección es perpendicular al plano determinado por los vectores  $\mathbf{r}_i$  y  $\mathbf{v}_i$  y está situado en el plano determinado por  $\mathbf{r}_i$  y el eje  $Z$ . Por consiguiente hace un ángulo  $\pi/2 - \theta_i$  con el eje de rotación  $Z$ . La magnitud de  $\mathbf{L}_i$  es  $m_i r_i v_i$ , y su componente paralela al eje  $Z$  es

$$\begin{aligned} L_{iz} &= (m_i r_i v_i) \cos(\pi/2 - \theta_i) \\ &= m_i (r_i \sin \theta_i) (\omega R_i) = m_i R_i^2 \omega, \end{aligned}$$

resultado que es equivalente a la ec. (7.33) para una partícula que se desplaza en un círculo. La componente del momentum angular total del cuerpo rotante a lo largo del eje de rotación  $Z$  es

$$\begin{aligned} L_z &= L_{1z} + L_{2z} + L_{3z} + \dots = \sum_i L_{iz} \\ &= (m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + m_3 R_3^2 + \dots) \omega = (\sum_i m_i R_i^2) \omega. \end{aligned} \quad (10.1)$$

La cantidad

$$I = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + m_3 R_3^2 + \dots = \sum_i m_i R_i^2 \quad (10.2)$$

se denomina el *momento de inercia* de un cuerpo con respecto al eje de rotación  $Z$ . Dicho momento se obtiene sumando, para cada partícula, el producto de su masa multiplicado por el cuadrado de su distancia al eje. El momento de inercia es una cantidad muy importante que aparece en muchas expresiones relacionadas con la rotación de un cuerpo rígido. Podemos, por lo tanto escribir la ec. (10.1) en la forma

$$L_z = I \omega. \quad (10.3)$$

El momentum angular total del cuerpo es igual a

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3 + \dots = \sum_i \mathbf{L}_i,$$

y en general *no* es paralelo al eje de rotación, ya que hemos indicado que los momentos angulares individuales  $\mathbf{L}_i$  que aparecen en la suma no son paralelos al eje.

El estudiante se preguntará si para cada cuerpo hay algún eje de rotación para el cual el momentum angular total sea paralelo al eje. La respuesta es afirmativa. Puede demostrarse que para cada cuerpo, sin importar su forma,

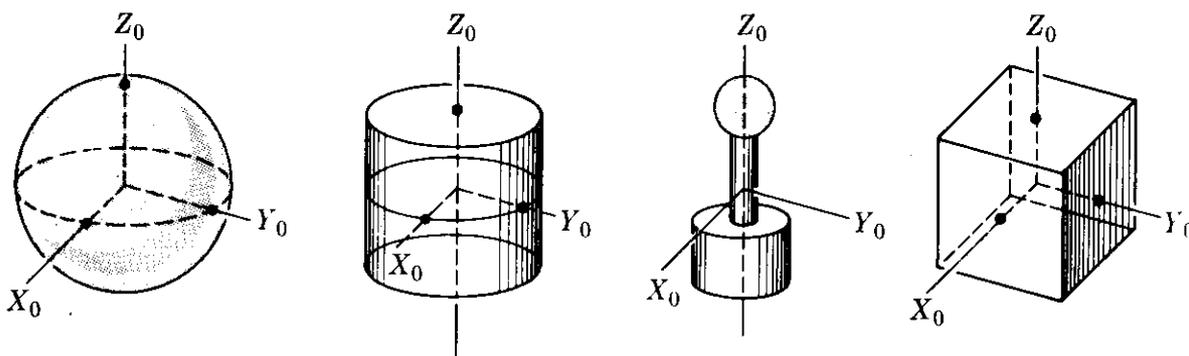


Fig. 10-5. Ejes principales de cuerpos simétricos.

hay (por lo menos) tres direcciones mutuamente perpendiculares para las cuales el momentum angular es paralelo al eje de rotación. Estos ejes se denominan *ejes principales de inercia*, y los momentos correspondientes de inercia, se llaman *momentos principales de inercia*, designados por  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ . Designemos los ejes principales,  $X_0Y_0Z_0$ ; ellos constituyen un sistema de referencia fijo en el cuerpo, y, en general, rotan con respecto al observador. Cuando el cuerpo tiene alguna clase de simetría, los ejes principales coinciden con algún eje de simetría. Por ejemplo, en una esfera, cualquier eje que pasa a través de su centro es un eje principal. Para un cilindro y, en general, para cualquier cuerpo con simetría cilíndrica, el eje de simetría, así como cualquier eje perpendicular a él, son ejes principales. Para un bloque rectangular los tres ejes principales son perpendiculares a las superficies y pasan a través del centro del bloque. Estos ejes se ilustran en la Fig. 10-5.

Cuando el cuerpo rota alrededor de un eje principal de inercia, el momentum angular total  $\mathbf{L}$  es paralelo a la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$ , que se encuentra siempre a lo largo del eje de rotación, y en lugar de la ecuación escalar (10.3), la cual es válida para la componente  $Z$  a lo largo del eje de rotación, podemos escribir la relación vectorial

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}, \quad (10.4)$$

en la cual  $I$  es el momento principal de inercia correspondiente. Debemos insistir que esta relación vectorial es válida solamente para la rotación alrededor de un eje principal de inercia.

En el caso más general de rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje arbitrario, el momentum angular  $\mathbf{L}$  puede expresarse con relación a los ejes principales de inercia en movimiento  $X_0Y_0Z_0$  (Fig. 10-6) por la expresión

$$\mathbf{L} = u_{x_0}I_1\omega_{x_0} + u_{y_0}I_2\omega_{y_0} + u_{z_0}I_3\omega_{z_0}, \quad (10.5)$$

en la cual  $u_{x_0}$ ,  $u_{y_0}$  y  $u_{z_0}$  son los vectores unitarios a lo largo de  $X_0$ ,  $Y_0$  y  $Z_0$  y  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$  y  $\omega_{z_0}$  son las componentes de  $\boldsymbol{\omega}$  con respecto a los mismos ejes. En este caso,  $\mathbf{L}$  y  $\boldsymbol{\omega}$  tienen diferentes direcciones como lo expresamos anteriormente. La ventaja de utilizar esta expresión para  $\mathbf{L}$  es que  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  son cantidades fijas que pueden evaluarse para cada cuerpo. Sin embargo, ya que los vectores unitarios  $u_{x_0}$ ,  $u_{y_0}$  y  $u_{z_0}$  rotan con el cuerpo, éstos no tienen necesariamente una dirección constante. El estudiante puede verificar que la ec. (10.5) se reduce a la ec. (10.4) en el caso de la rotación alrededor de un eje principal (dos de las componentes son nulas).

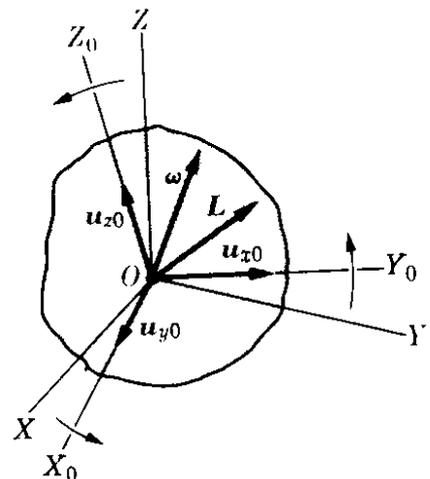


Fig. 10-6. Ejes fijos en el cuerpo y ejes fijos en el laboratorio.

**EJEMPLO 10.1.** Calcular el momentum angular del sistema ilustrado de la Fig. 10-7, el cual consiste de dos esferas iguales de masa  $m$  montadas sobre brazos conectados a una chumacera y que rotan alrededor del eje  $Z$ . Despreciar la masa de los brazos.

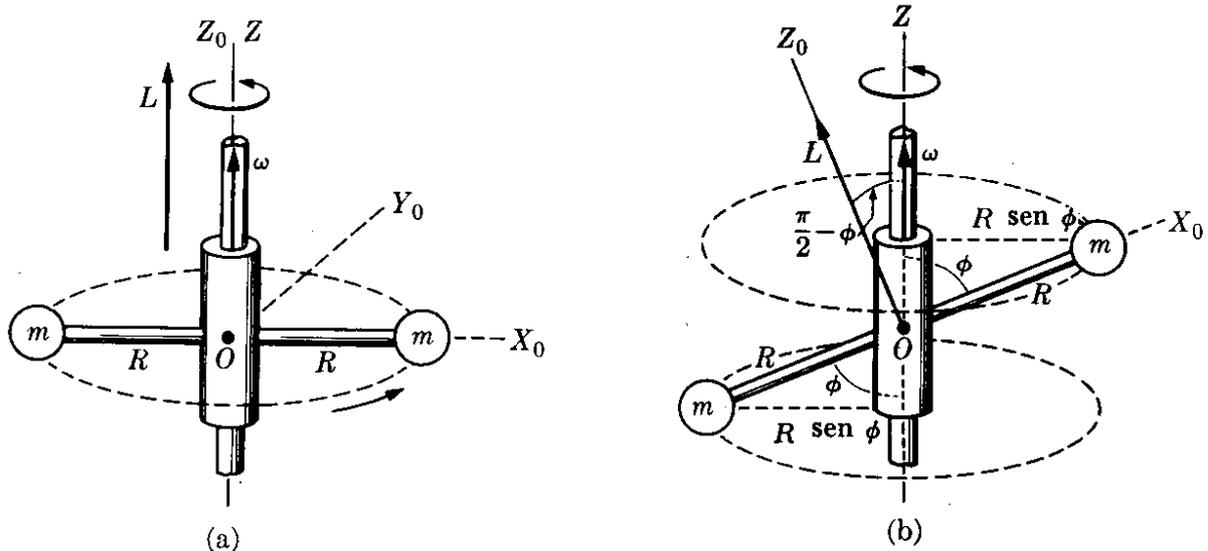


Figura 10-7

**Solución:** En la Fig. 10-7 (a) tenemos un caso en el cual los dos brazos son perpendiculares al eje de rotación  $Z$ . Cada esfera describe un círculo de radio  $R$  con velocidad  $v = \omega R$ . El momentum angular de cada esfera con respecto a  $O$  es por consiguiente  $mR^2\omega$ , y está dirigido a lo largo del eje  $Z$  (recordar la Fig. 7-22). Por ello el momentum angular total del sistema es  $L = 2mR^2\omega$  y tiene su dirección a lo largo del eje  $Z$ , de modo que podemos escribir en forma vectorial  $L = 2mR^2\omega$ , indicando así que el sistema está rotando alrededor de un eje principal. En realidad, los ejes principales  $X_0Y_0Z_0$  son como se muestra en la figura, y  $Z_0$  coincide con  $Z$ .\* Nótese que  $I = 2mR^2$  es el momento principal de inercia alrededor del eje  $Z_0$ , y por ello la relación  $L = I\omega$  se cumple en este caso.

En la Fig. 10-7 (b) tenemos el caso en el cual los dos brazos forman un ángulo  $\phi$  con el eje de rotación  $Z$ , de modo que  $\omega$  no es paralela a un eje principal. El radio del círculo descrito por cada esfera es  $R \sin \phi$ , de modo que la magnitud de sus velocidades es,  $(R \sin \phi)\omega$ . El momentum angular de cada esfera con respecto a  $O$  es por consiguiente  $mR(R\omega \sin \phi)$  y está dirigido perpendicularmente a la línea que une las dos esferas y en el plano determinado por los ejes  $Z$  y  $X_0$ . El momentum angular total es la suma de los dos resultados; esto es  $L = (2mR^2 \sin \phi)\omega$ , y forma un ángulo  $\pi/2 - \phi$  con el eje de rotación. En consecuencia, en este caso el sistema no está rotando con respecto a un eje principal como puede verse también de la simetría del sistema. Nótese que el vector  $L$  está rotando (o, como se dice algunas veces, *precesando*) alrededor del eje  $Z$  a la misma velocidad del sistema.

La componente de  $L$  a lo largo del eje de rotación es

$$L_z = L \cos(\pi/2 - \phi) = (2mR^2 \sin^2 \phi)\omega,$$

en concordancia con la ec. (10.3), ya que  $I = 2m(R \sin \phi)^2$  es el momento de inercia del sistema con respecto al eje  $Z$ .

### 10.3 Cálculo del momento de inercia

Discutiremos ahora las técnicas para calcular el momento de inercia, ya que esta cantidad se utilizará muy a menudo en este capítulo. En primer lugar notamos

\* Debido a la simetría del sistema en consideración, cualquier eje perpendicular a  $X_0$  es un eje principal.

que un cuerpo rígido está compuesto de un número muy grande de partículas, de modo que la suma en la ec. (10.2) debe reemplazarse por una integral,  $I = \sum_i m_i R_i^2 = \int R^2 dm$ ; o, si  $\rho$  es la densidad del cuerpo,  $dm = \rho dV$  de acuerdo con la ec. (2.2), y

$$I = \int \rho R^2 dV. \tag{10.6}$$

Si el cuerpo es homogéneo, su densidad es constante, y en lugar de la ec. (10.6) podemos escribir  $I = \rho \int R^2 dV$ . La integral se reduce así a un factor geométrico, igual para todos los cuerpos con la misma forma y tamaño. Notamos de la Fig. 10-8 que  $R^2 = x^2 + y^2$ , y, por consiguiente, el momento de inercia con respecto al eje Z es

$$I_Z = \int \rho(x^2 + y^2) dV. \tag{10.7}$$

(Sugerimos que el estudiante escriba las relaciones correspondientes para  $I_x$  e  $I_y$ .)

Si el cuerpo es una placa delgada, como se muestra en la Fig. 10-9, notamos que los momentos de inercia con respecto a los ejes X e Y pueden escribirse como  $I_x = \int \rho y^2 dV$  e  $I_y = \int \rho x^2 dV$  ya que la coordenada Z es esencialmente cero. La comparación con la ec. (10.7) muestra que en este caso

$$I_z = I_x + I_y,$$

resultado que es válido solamente para placas delgadas.

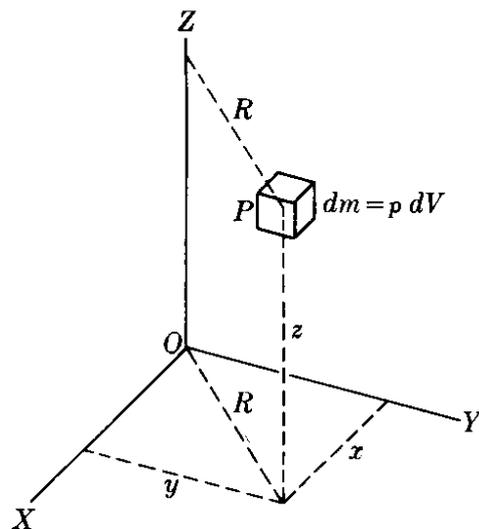


Figura 10-8

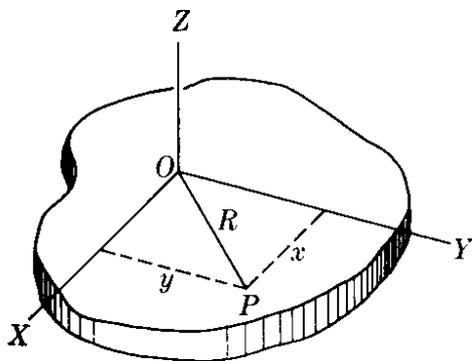


Figura 10-9

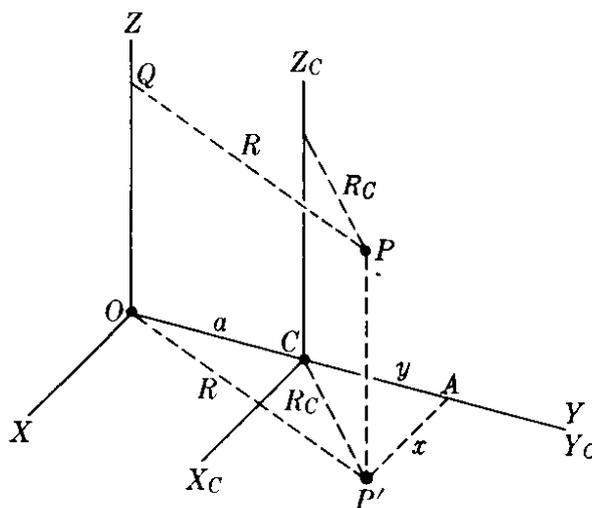


Figura 10-10

Los momentos de inercia con respecto a los ejes paralelos están relacionados por una fórmula muy simple. Sea Z un eje arbitrario y  $Z_c$  un eje paralelo que pasa a través del centro de masa del cuerpo (Fig. 10-10). Si  $a$  es la separación entre

los dos ejes, la siguiente relación, denominada *Teorema de Steiner*, tiene lugar:

$$I = I_C + Ma^2, \quad (10.8)$$

donde  $I$  e  $I_C$  son los momentos de inercia del cuerpo con respecto a  $Z$  y  $Z_C$ , respectivamente, y  $M$  es la masa del cuerpo. Para probar esta relación, escojamos los ejes  $X_C Y_C Z_C$  de modo que su origen se encuentre en el centro de masa  $C$  y el eje  $Y_C$  se encuentre en el plano determinado por  $Z$  y  $Z_C$ . Los ejes  $XYZ$  se escogen de modo que  $Y$  coincide con  $Y_C$ . El punto  $P$  es un punto arbitrario del cuerpo  $M$ . Entonces, notando de la Fig. 10-10 que  $P'A$  es perpendicular a  $Y_C$  y  $P'A = x$ ,  $CA = y$ , y  $OC = a$ , tenemos

$$\begin{aligned} R_C^2 &= x^2 + y^2, \\ R^2 &= x^2 + (y + a)^2 \\ &= x^2 + y^2 + 2ya + a^2 \\ &= R_C^2 + 2ya + a^2. \end{aligned}$$

Ahora el momento de inercia con respecto al eje  $Z$  es

$$\begin{aligned} I &= \Sigma m R^2 = \Sigma m (R_C^2 + 2ya + a^2) \\ &= \Sigma m R_C^2 + 2a(\Sigma my) + a^2 \Sigma m. \end{aligned}$$

El primer término es justamente el momento de inercia  $I_C$  con respecto al eje  $Z_C$ , y en el último término  $\Sigma m = M$ , es la masa total del cuerpo. Por consiguiente

$$I = I_C + 2a\Sigma my + Ma^2. \quad (10.9)$$

Para evaluar el término central recordamos de la ec (4.21) que la posición del centro de masa está dada por  $y_{CM} = \Sigma my / \Sigma m$ . Pero en nuestro caso  $y_{CM} = 0$  ya que el centro de masa coincide con el origen  $C$  del sistema  $X_C Y_C Z_C$ . Luego  $\Sigma my = 0$ , y la ec. (10.9) se reduce a la ec. (10.8), la cual queda así demostrada.

El momento de inercia debe expresarse como el producto de una unidad de masa y el cuadrado de una unidad de distancia. Así en el sistema MKSC el momento de inercia se expresa en  $m^2 \text{ kg}$ .

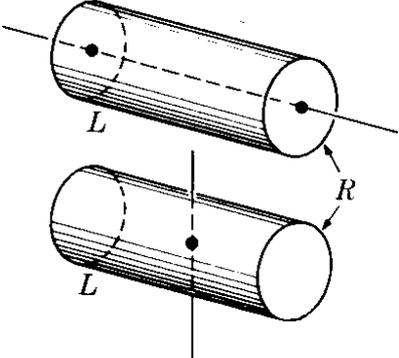
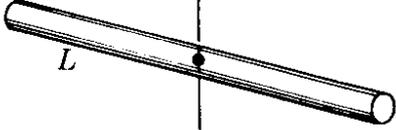
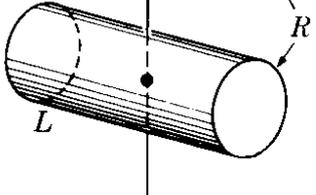
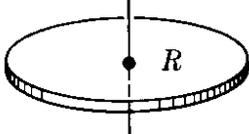
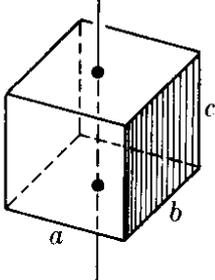
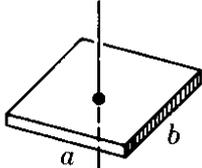
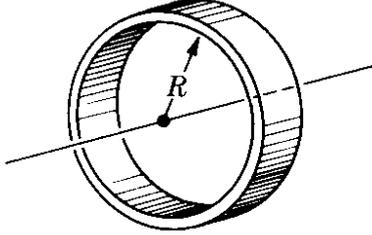
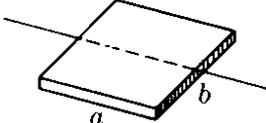
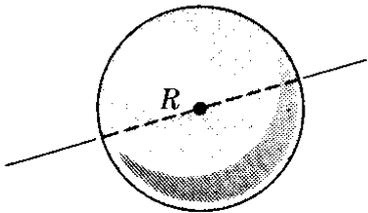
El *radio de giro* de un cuerpo es una cantidad  $K$  definida de modo que se cumpla la siguiente relación,

$$I = MK^2 \quad \text{ó} \quad K = \sqrt{I/M}, \quad (10.10)$$

en la cual  $I$  es el momento de inercia y  $M$  la masa del cuerpo. El radio de giro representa la distancia del eje a la cual se puede concentrar la masa del cuerpo sin variar su momento de inercia. Es una cantidad útil ya que puede determinarse, para cuerpos homogéneos, enteramente por su geometría. Puede evaluarse fácilmente y nos ayuda en el cálculo de los momentos de inercia.\* La tabla 10-1 nos presenta los cuadrados de los radios de giro de varias figuras geométricas.

\* Para la técnica de cálculo de momentos de inercia, ver cualquier libro de cálculo; por ejemplo, G. B. Thomas, *Cálculo infinitesimal y geometría analítica*, tercera edición. Madrid: Aguilar, S. A., 1964, sec. 15.3.

TABLA 10-1 Radio de giro de algunos simples

$K^2$	Eje	$K^2$	Eje
$\frac{R^2}{2}$	<p>Cilindro</p> 	$\frac{L^2}{12}$	<p>Varilla delgada</p> 
$\frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{12}$		$\frac{R^2}{2}$	<p>Disco</p> 
$\frac{a^2 + b^2}{12}$	<p>Paralelepípedo</p> 	$\frac{R^2}{4}$	
$\frac{a^2 + b^2}{12}$	<p>Placa rectangular</p> 	$R^2$	<p>Anillo</p> 
$\frac{b^2}{12}$		$\frac{2R^2}{5}$	<p>Esfera</p> 

**EJEMPLO 10.2.** Calcular el momento de inercia de una varilla delgada homogénea con respecto a un eje perpendicular a la varilla y que pasa a través de (a) un extremo, y (b) al centro.

**Solución:** (a) Llamemos  $L$  la longitud de la varilla  $AB$  (Fig. 10-11) y  $S$  su sección recta, que supondremos muy pequeña. Dividiendo la varilla en pequeños segmentos de longitud  $dx$ , encontramos que el volumen de cada segmento es  $dV = S dx$  y la distancia de cada elemento al eje  $Y$  es  $R = x$ . Por lo tanto, usando la ec. (10.6) con la densidad  $\rho$  constante, tenemos

$$I_A = \int_0^L \rho x^2 (S dx) = \rho S \int_0^L x^2 dx = \frac{1}{3} \rho S L^3.$$

Pero  $SL$  es el volumen de la varilla y  $\rho SL$  es su masa. Por consiguiente

$$I_A = \frac{1}{3} ML^2.$$

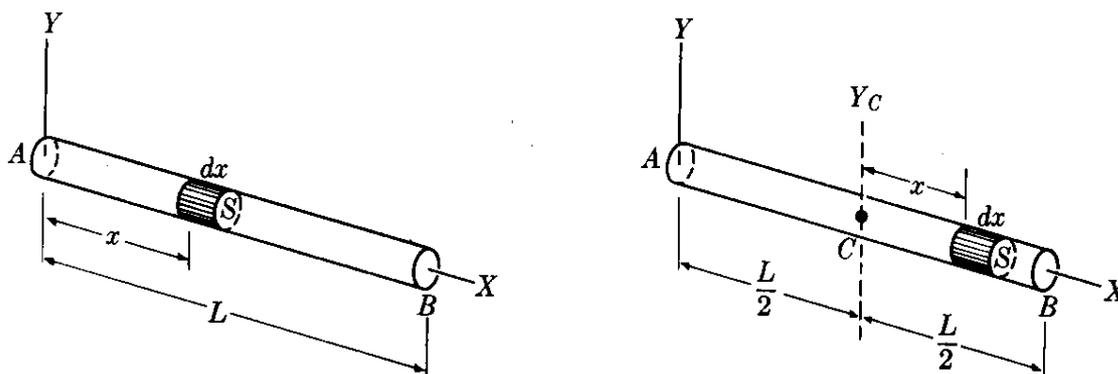


Figura 10-11

Comparándola con la ec. (10.10) nos da el radio de giro  $K^2 = \frac{1}{3}L^2$ .

(b) Para calcular el momento de inercia con respecto al eje  $Y_c$  que pasa a través del centro de masa  $C$ , podemos proceder de tres maneras diferentes. Una manera muy simple es suponer que la varilla está dividida en dos, cada una de masa  $\frac{1}{2}M$  y longitud  $\frac{1}{2}L$ , con sus extremos tocándose en  $C$ , y usar el resultado anterior para cada varilla. Luego

$$I_c = 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}M\right)\left(\frac{1}{2}L\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2.$$

Otro método sería proceder como antes para el extremo  $A$ , pero integrar de  $-\frac{1}{2}L$  a  $+\frac{1}{2}L$ , ya que el origen se encuentra ahora en el centro de la varilla. Dejamos esta solución para el estudiante. Un tercer método es aplicar el teorema de Steiner, ec. (10.8), como sigue  $I_A = I_c + M\left(\frac{1}{2}L\right)^2$ , ya que  $a = \frac{1}{2}L$ . Por ello

$$I_c = I_A - \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{12}ML^2.$$

**EJEMPLO 10.3.** Calcular el momento de inercia de un disco homogéneo con respecto a (a) un eje perpendicular que pasa por su centro, y (b) un eje que coincida con un diámetro.

**Solución:** (a) De la Fig. 10-12 vemos que la simetría del problema sugiere que usemos, como elemento de volumen, un anillo de radio  $r$  y espesor  $dr$ . Así si llamamos  $h$  el espesor del disco, el volumen del anillo es  $dV = (2\pi r)(dr)h = 2\pi hr dr$ . Todos los puntos del anillo se encuentran a una distancia  $r$  del eje  $Z$ . Por consiguiente, usando la ec. (10.5), obtenemos

$$I = \int_0^R \rho r^2(2\pi hr dr) = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\rho h R^4.$$

Pero  $\pi R^2 h$  es el volumen del disco y  $M = \rho(\pi R^2 h)$  es la masa total del disco. Por ello

$$I = \frac{1}{2}MR^2,$$

de modo que el radio de giro es  $K^2 = \frac{1}{2}R^2$ .

(b) Para obtener los momentos de inercia con respecto a los ejes  $X$  e  $Y$ , podemos proceder por integración directa (se sugiere que se utilicen como elementos de volumen placas paralelas o perpendiculares a los ejes de coordenadas), pero la simetría del problema permite un procedimiento más simple. Obviamente  $I_x = I_y$  en este caso, y por consiguiente, de la fórmula para las placas delgadas, tenemos  $I_z = I_x + I_y = 2I_x$  y

$$I_x = \frac{1}{2}I_z = \frac{1}{4}MR^2.$$

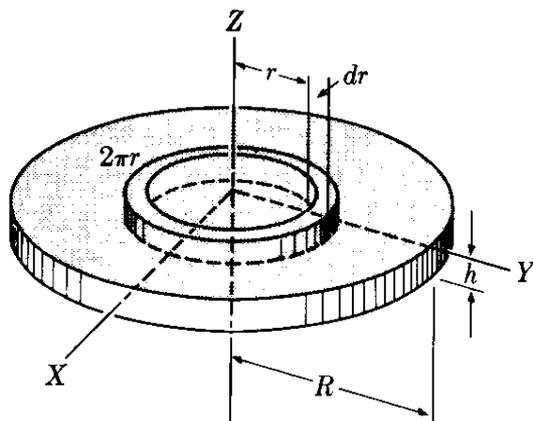


Figura 10-12

**10.4 Ecuación de movimiento de la rotación de un cuerpo rígido**

En la ec. (9.21) establecimos una relación entre el momentum angular total de un sistema de partículas y el torque total de las fuerzas aplicadas a las partículas cuando tanto el torque como el momentum angular se calculan con respecto a un punto en reposo en un sistema inercial. Esto es,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}, \quad (10.11)$$

donde  $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i$  es el momentum angular total y  $\boldsymbol{\tau} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i$  es el torque total debido a las fuerzas externas. Obviamente esta ecuación se cumple también para un cuerpo rígido, el cual es un caso especial de un sistema de partículas. La ec. (10.11) constituye así la ecuación básica para discutir el movimiento de rotación de un cuerpo rígido. La aplicaremos primero al caso de un cuerpo rígido que rota alrededor de un eje principal que tiene un punto fijo en un sistema inercial. Por ello, de acuerdo a la ec. (10.4),  $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ . El torque externo  $\boldsymbol{\tau}$  debe ser el torque con respecto al punto fijo sobre el eje principal. Luego la ec. (10.11) se transforma en

$$\frac{d(I\boldsymbol{\omega})}{dt} = \boldsymbol{\tau}. \quad (10.12)$$

Si el eje permanece fijo con respecto al cuerpo rígido, el momento de inercia permanece constante. Entonces

$$I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\tau} \quad \text{ó} \quad I\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\tau}, \quad (10.13)$$

donde  $\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt$  es la aceleración angular del cuerpo rígido. La comparación de las ecs. (10.12) y (10.13) con las ecs. (7.14) y (7.15) sugiere una gran similitud entre la rotación de un cuerpo rígido con respecto a un eje principal y el movimiento de una partícula. La masa  $m$  es reemplazada por el momento de inercia  $I$ , la velocidad  $\mathbf{v}$  por la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$ , la aceleración  $\mathbf{a}$  por la aceleración angular  $\boldsymbol{\alpha}$ , y la fuerza  $\mathbf{F}$  por el torque  $\boldsymbol{\tau}$ .

Por ejemplo, si  $\boldsymbol{\tau} = 0$ , entonces la ec. (10.12) indica que  $I\boldsymbol{\omega} = \text{const}$ , y si el momento de inercia es constante, luego  $\boldsymbol{\omega}$  es también constante. Esto es, *un cuerpo rígido que rota alrededor de un eje principal se mueve con velocidad angular constante cuando no se aplican torques externos*. Esto puede considerarse como la ley de inercia para el movimiento de rotación. [Cuando el momento de inercia es variable, en el caso de que el cuerpo no sea rígido, la condición  $I\boldsymbol{\omega} = \text{constante}$  requiere que si  $I$  aumenta (disminuye) entonces  $\boldsymbol{\omega}$  disminuye (aumenta), un hecho que tiene varias aplicaciones.]

En el caso de un cuerpo que *no* esté rotando alrededor de un eje principal, tenemos aun de la ec. (10.3) que  $dL_z/dt = \tau_z$  o, si la orientación del eje es fija con respecto al cuerpo de modo que  $I$  sea constante,

$$I \frac{d\omega}{dt} = \tau_z, \quad (10.14)$$

Ya que el centro de masa  $C$  está fijo, su aceleración es cero y debemos tener

$$2F' - Mg - F = 0 \quad \text{ó} \quad F' = 102,9 \text{ N.}$$

**EJEMPLO 10.5.** Encontrar la aceleración angular del sistema ilustrado en la figura 10-14 para un cuerpo cuya masa es de 1 kg. Los datos para el disco son los mismos que en el ejemplo 10.4. El eje  $ZZ'$  está fijo y es un eje principal.

**Solución:** Ya que la masa del cuerpo es de 1 kg, su peso es de  $mg = 9,8 \text{ N}$ , el cual tiene el mismo valor que la fuerza  $F$  de la Fig. 10-13. Por ello uno estaría tentado de considerar este caso como idéntico al anterior y suponer que los resultados son los mismos. Sin embargo, esto no es cierto! La masa  $m$ , al caer, ejerce una fuerza  $F$  hacia abajo sobre el disco, y por la ley de acción y reacción el disco ejerce una fuerza igual  $F$  pero hacia arriba sobre la masa  $m$ . Como la masa  $m$  está cayendo con movimiento acelerado, la fuerza total sobre ella no puede ser cero. Por ello  $F$  no es igual a  $mg$ , sino menor. Por consiguiente, el disco está sometido a un torque menor.

La ecuación de movimiento de la masa  $m$  es

$$mg - F = ma = mR\alpha,$$

donde se ha utilizado la relación  $a = R\alpha$ . La ecuación de movimiento del disco es  $I\alpha = FR$  ó (ya que  $I = \frac{1}{2}MR^2$ )  $F = \frac{1}{2}MR\alpha$ . Eliminando  $F$  de estas ecuaciones, encontramos que la aceleración angular es

$$\alpha = \frac{mg}{(m + \frac{1}{2}M)R} = 1,80 \text{ rad s}^{-2},$$

la cual es menor que en nuestro resultado anterior. La aceleración hacia abajo de  $m$  es

$$a = R\alpha = \frac{mg}{m + \frac{1}{2}M} = 0,90 \text{ m s}^{-2},$$

la cual es menor que  $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$ , el valor de caída libre. La fuerza  $F'$  en los soportes puede calcularse como en el ejemplo anterior.

**EJEMPLO 10.6.** Determinar la aceleración angular del disco de la Fig. 10-15, así como la aceleración hacia abajo de su centro de masa. Suponer los mismos datos que para el disco del ejemplo 10.4.

**Solución:** El eje de rotación es el eje principal  $Z_0Z'_0$ . Sin embargo, este problema difiere de los ejemplos previos, en que el centro de masa del disco no está fijo, ya que el movimiento del disco es similar a aquel de un yo-yo, y por consiguiente ahora debe utilizarse la ec. (10.15). La rotación del disco con respecto al eje  $Z_0Z'_0$  está dada por la ecuación  $I\alpha = FR$ , ya que el torque del peso de  $Mg$  con respecto a  $C$  es cero. Luego, con  $I = \frac{1}{2}MR^2$ , podemos escribir (después de cancelar el factor común  $R$ ),  $F = \frac{1}{2}MR\alpha$ .

El movimiento hacia abajo del centro de masa tiene una aceleración  $a = R\alpha$ , y si tomamos en cuenta el hecho de que la fuerza resultante externa es  $Mg - F$ , tenemos, usando la ec. (9.9),

$$Mg - F = Ma = M R\alpha.$$

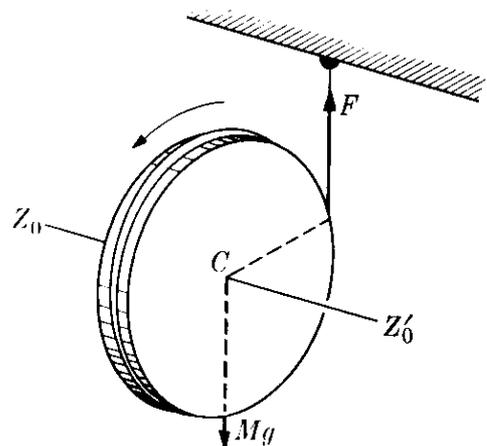
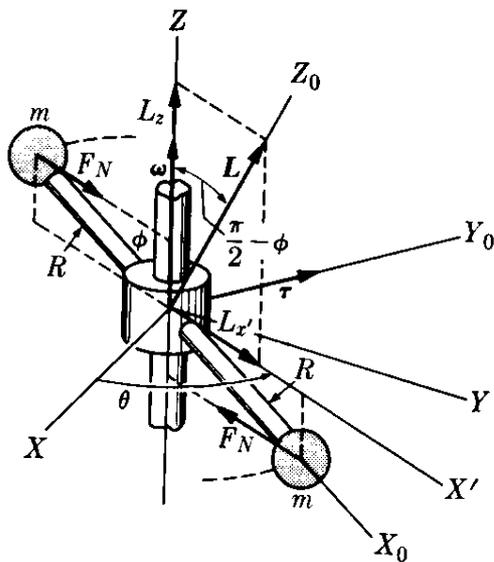


Figura 10-51

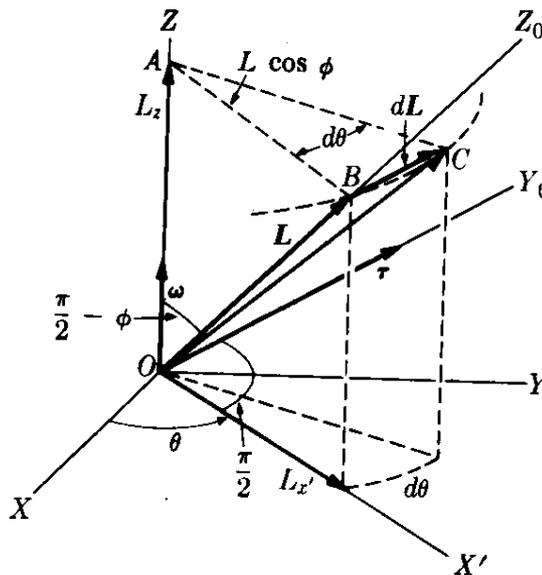
Eliminando la fuerza  $F$  entre esta ecuación y la precedente, y notando que la masa  $M$  se cancela, obtenemos de la ecuación resultante  $\alpha = 2g/3R = 13,16 \text{ rad s}^{-2}$ . La aceleración hacia abajo de su centro de masa es  $a = R\alpha = \frac{2}{3}g = 6,53 \text{ m s}^{-2}$ , la cual es menor que la aceleración de caída libre, y es independiente del tamaño y de la masa del disco.

**EJEMPLO 10.7.** Calcular el torque necesario para que el sistema de la Fig. 10-7 (b) rote con velocidad angular constante.

**Solución:** En este caso la velocidad angular  $\omega$  con respecto al eje fijo  $Z$  no cambia, y por lo tanto  $d\omega/dt = 0$ . Se derivan dos conclusiones inmediatas. Primero, sabemos que el momentum angular total  $L = (2mR^2 \text{ sen } \phi) \omega$  permanece constante en magnitud, y que la componente a lo largo del eje  $Z$ ,  $L_z = (2mR^2 \text{ sen}^2\phi)\omega$  es también constante. Segundo, el torque respecto al eje  $Z$ , dado por  $\tau_z = I d\omega/dt$  es cero. Entonces a primera vista estaríamos tentados en decir, que no se requiere ningún torque para mantener el sistema en movimiento. Sin embargo, esto no es cierto: el momentum angular  $L$  rota con el sistema con respecto al eje  $Z$  (esto se denomina *precesión*, como se mencionó al final del ejemplo 10.1), y se requiere un torque para producir este cambio en la dirección de  $L$ . La situación es enteramente análoga a aquella encontrada en el movimiento circular uniforme: la velocidad permanece constante en magnitud pero se requiere una fuerza para cambiar su dirección.



**Fig. 10-16.** Rotación de un cuerpo alrededor de un eje arbitrario.



**Fig. 10-17.** Precesión del momentum angular del cuerpo ilustrado en la Fig. 10-16.

El torque  $\tau$  debe quedar en el plano  $XY$ , ya que  $\tau_z = 0$ . Debe ser también perpendicular al plano  $Z_0Z$ , determinado por la dirección de  $L$  (o el eje  $Z_0$ ) y el eje  $Z$  (Figs. 10-16 y 10-17), y debe tener la dirección del eje  $Y_0$ . Esto puede verse en la forma siguiente. La ecuación (10.11),  $dL = \tau dt$ , indica que  $dL$  y  $\tau$  son vectores paralelos (en el mismo sentido que  $dv$  y  $F$  son paralelos en el caso de una partícula). Pero, como  $L$  es constante en magnitud,  $dL$  es perpendicular a él, y lo es también  $\tau$ . Como el vector  $L$  mantiene un ángulo constante  $\pi/2 - \phi$  con el eje  $Z$  su extremo se mueve sobre un círculo de radio  $AB = L \text{ sen } (\pi/2 - \phi) = L \text{ cos } \phi$ , y  $dL$  es tangente al círculo. Esto implica a su vez que  $dL$  es perpendicular al plano  $Z_0Z$

un resultado que difiere de la ec. (10.13) en que  $\tau_z$  se refiere a la componente de torque externo total alrededor del eje de rotación y no al torque total. En adición a la componente  $\tau_z$  del torque, pueden haber otros torques que se requieran para mantener el cuerpo en una posición fija con respecto al eje de rotación (ver ejemplo 10.7).

Cuando el eje de rotación no tiene un punto fijo en un sistema inercial, no podemos usar la ec. (10.11) y debemos calcular el momentum angular y el torque con respecto al centro de masa del cuerpo. Así debemos usar la ec. (9.25), la cual es

$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{CM}}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{\text{CM}}. \quad (10.15)$$

Si la rotación es alrededor de un eje principal, esta ecuación se vuelve  $I_C(d\omega/dt) = \tau_{\text{CM}}$ . Si  $\tau_{\text{CM}} = 0$ , que es el caso cuando la única fuerza externa aplicada al cuerpo es su peso, entonces  $\omega$  es constante (ver la Fig. 10-3).

**EJEMPLO 10.4.** Un disco de 0,5 m de radio y 20 kg de masa puede rotar libremente alrededor de un eje horizontal fijo que pasa por su centro. Se aplica una fuerza  $F$  de 9,8 N tirando de una cuerda atada alrededor del borde del disco. Encontrar la aceleración angular del disco y su velocidad angular después de 2 s.

**Solución:** De la Fig. 10-13 vemos que las únicas fuerzas externas sobre el disco son su peso  $Mg$ , la fuerza hacia abajo  $F$ , y las fuerzas  $F'$  en los soportes. El eje  $ZZ'$  es un eje principal. Calculando los torques con respecto al centro de masa  $C$ , encontramos que el torque del peso es cero. El torque combinado de las fuerzas  $F'$  es también cero. Así  $\tau = FR$ . Aplicando la ec. (10.4) con  $I = \frac{1}{2}MR^2$ , tenemos que  $FR = (\frac{1}{2}MR^2)\alpha$  ó  $F = \frac{1}{2}MR\alpha$ , dando una aceleración angular de

$$\alpha = \frac{2F}{MR} = \frac{2(9,8 \text{ N})}{(20 \text{ kg})(0,5 \text{ m})} = 1,96 \text{ rad s}^{-2}.$$

De acuerdo a la ec. (5.54), la velocidad angular después de 2 s si el disco partiera del reposo es

$$\omega = \alpha t = (1,96 \text{ rad s}^{-2})(2 \text{ s}) = 3,92 \text{ rad s}^{-1}.$$

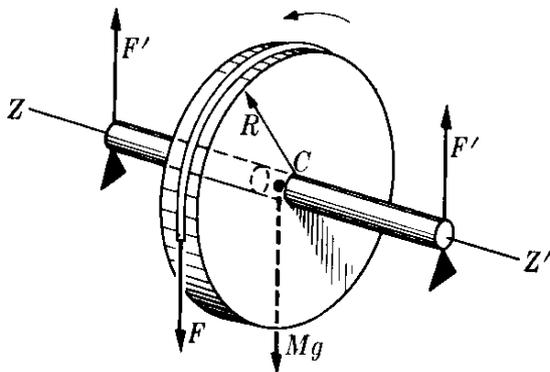


Figura 10-13

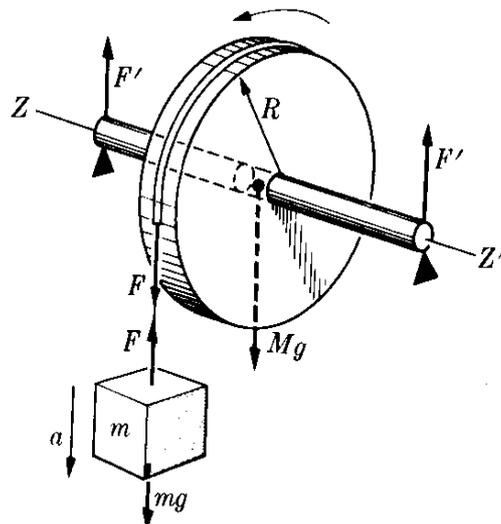


Figura 10-14

(o paralelo a  $Y_0$ ), lo cual significa que  $\tau$  lo sea también. Para encontrar la magnitud de  $dL$  notamos de la Fig. 10-17 que

$$|dL| = AB d\theta = (L \cos \phi)\omega dt,$$

ya que  $\omega = d\theta/dt$ . Igualando esto a  $\tau dt$  e introduciendo el valor de  $L$ , encontramos que

$$\tau = (2mR^2 \sin \phi \cos \phi)\omega^2.$$

Es instructivo ver la necesidad física de este torque. De la Fig. 10-16 notamos que las esferas, cada una de masa  $m$ , tienen movimiento circular uniforme y cada una requiere una fuerza centrípeta  $F_N = m\omega^2 R \sin \phi$  para describir el círculo de radio  $R \sin \phi$ . Estas dos fuerzas forman un par, cuyo brazo es  $2R \cos \phi$ . Luego el torque del par es  $\tau = (mR\omega^2 \sin \phi)(2R \cos \phi)$ , que coincide con nuestro resultado previo. Así, se necesita el torque para mantener las esferas en sus posiciones fijas con respecto al eje de rotación.

Dejamos al estudiante la verificación de que, en el caso señalado Fig. 10.7 (a), donde la rotación es con respecto a un eje principal y a una velocidad angular constante, este torque no es necesario. Por esta razón, para evitar torques transversales como los del ejemplo anterior, las partes rotantes de cualquier mecanismo deben montarse en ejes principales.

Un método alterno de solución del problema sería encontrar las componentes de  $L$  paralelas a los ejes fijos  $XYZ$  y obtener las componentes de  $\tau$  mediante la aplicación directa de la ec. (10.11). Esto se deja como ejercicio para el estudiante (Problema 10.50).

**EJEMPLO 10.8.** Analizar el movimiento general de un cuerpo rígido no sometido a torques externos.

**Solución:** En este ejemplo examinaremos el movimiento general de un cuerpo rígido cuando no se le aplican torques externos; esto es,  $\tau = 0$ . Luego la ec. (10.11) da  $dL/dt = 0$  ó  $L$  constante. Por consiguiente, el momentum angular permanece constante en magnitud y dirección con respecto al sistema inercial  $XYZ$  utilizando por el observador.

Considerando que los torques de las fuerzas y los momentums angulares son siempre calculados con respecto a un punto, debemos precisar con respecto a qué punto el torque es cero. Hay dos posibilidades: una existe cuando el punto está fijo en un sistema inercial; luego el momentum angular se calcula con respecto a este punto. El otro caso ocurre cuando el torque con respecto al centro de masa es cero. Este es, por ejemplo, el caso de una pelota pateada por un futbolista. Una vez que la bola se encuentra en el aire, la única fuerza externa sobre ella es su peso actuando en el centro de masa, y por consiguiente, no hay torque con respecto al centro de masa. En esta situación es el momentum angular con respecto al centro de masa el que permanece constante. El movimiento del centro de masa no nos concierne, ya que se debe a la fuerza resultante externa y el movimiento prosigue de acuerdo a la ec. (9.9). Es la rotación con respecto al centro de masa la que nos interesa.

En este ejemplo, utilizaremos  $L$  para designar el momentum angular ya sea con respecto a un punto fijo o con respecto al centro de masa, y la discusión se aplica por consiguiente a ambos casos. Supongamos primero que el cuerpo está rotando con respecto a un eje principal. Luego, se puede aplicar la ec. (10.4) y  $L = I\omega$ . Por ello, si  $L =$  constante, entonces  $\omega$  es también constante. Esto significa que el cuerpo rota con velocidad angular constante con respecto a un eje fijo respecto tanto al cuerpo como al observador.

Supongamos que el cuerpo no está rotando con respecto a un eje principal. Luego se puede aplicar la ec. (10.5) y el hecho de que  $L$  sea constante no implica que  $\omega$  sea constante. Así la velocidad angular del cuerpo está variando y el eje de rotación

no permanece fijo con respecto al observador quien ve que  $\omega$  precesa alrededor de  $L$ . El eje de rotación con respecto al cuerpo no se encuentra tampoco fijo. La ecuación (10.5), que refiere  $L$  a los ejes principales  $X_0 Y_0 Z_0$  da

$$L^2 = I_1^2 \omega_{x_0}^2 + I_2^2 \omega_{y_0}^2 + I_3^2 \omega_{z_0}^2 = \text{const}$$

cuando  $L = \text{constante}$ . Esto expresa la condición que deben cumplir las componentes de  $\omega$  con respecto a los ejes principales  $X_0 Y_0 Z_0$ . Como los coeficientes  $I_1^2$ ,  $I_2^2$  e  $I_3^2$  son positivos y constantes, esta es la ecuación de un elipsoide, si  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$  y  $\omega_{z_0}$  se consideran como las coordenadas de un punto. Así el extremo del vector  $\omega$  debe quedar en este elipsoide (Fig. 10-18). Durante el movimiento, el vector  $\omega$  cambia también en magnitud y dirección con respecto al cuerpo y por ello el extremo del vector describe una trayectoria sobre la elipsoide, la cual se denomina *polhode* (del griego: *pólos*, polo; *hodos*, trayectoria).

El movimiento que acabamos de describir se encuentra en muchas situaciones de importancia. Por ejemplo, las fuerzas ejercidas por el sol, la luna y los planetas sobre la tierra están prácticamente aplicadas en el centro de masa y por ello el torque con respecto al centro de masa es esencialmente cero (realmente hay un pequeño torque; ver ejemplo 10.10). La tierra no es exactamente una esfera, sino que tiene ligeramente la forma de una pera, y no está rotando actualmente con respecto a un eje principal. Por consiguiente, su eje de rotación no está fijo a la tierra.

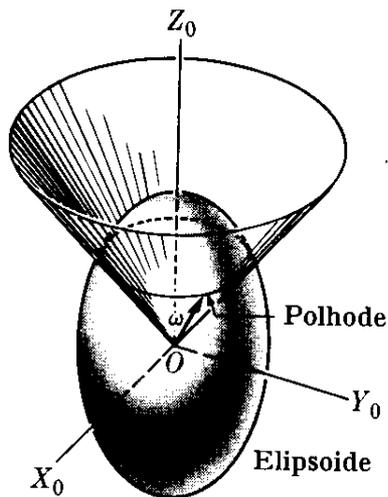


Fig. 10-18. Descripción del movimiento rígido. La trayectoria descrita por el extremo del vector velocidad angular, con respecto a ejes fijos en el cuerpo, es el polhode.

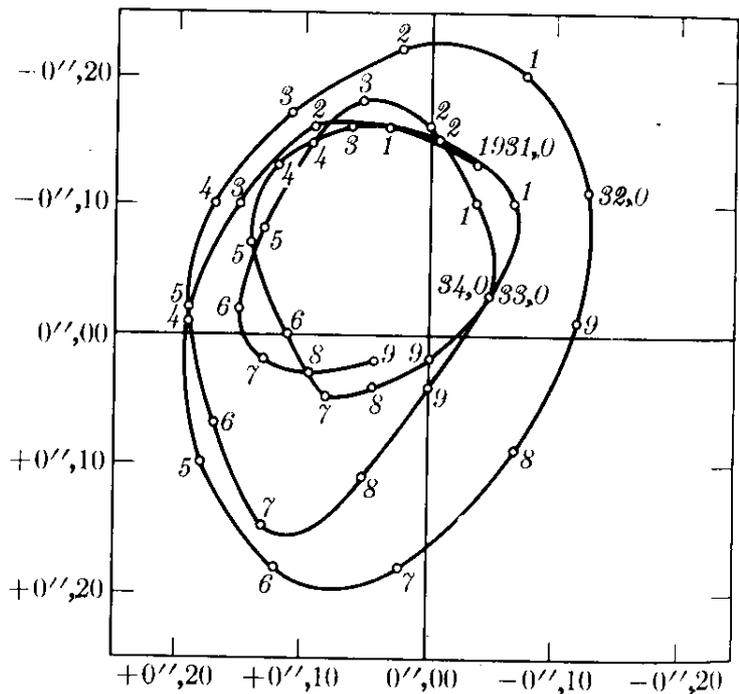


Fig. 10-19. Polhode del eje de rotación de la tierra en el período 1931-1935.

En la Fig. 10-19 se ilustra el polhode del eje de rotación de la tierra, el cual muestra la trayectoria seguida por la intersección norte del eje de rotación durante el período de 1931 a 1935. Debido a que intervienen otros factores, la forma de la curva es algo irregular, pero el diámetro de la curva nunca excede los 15 m y el período de revolución del eje es de aproximadamente 427 días.

El movimiento de rotación de una pelota de balompié después de haber sido golpeada es otro ejemplo del cambio en el eje de rotación de un cuerpo rígido libre de torques, ya que, en la mayor parte de los casos, el momentum angular de la pelota no se encuentra a lo largo de uno de sus ejes principales.

### 10.5 Energía cinética de rotación

En la sección 9.5 definimos la energía cinética de un sistema de partículas como

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2.$$

Hemos visto en la sección 10.2 que, en el caso de un cuerpo rígido rotando con respecto a un eje con velocidad angular  $\omega$ , la velocidad de cada partícula es  $v_i = \omega R_i$ , donde  $R_i$  es la distancia de la partícula al eje de rotación. Luego

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} (\sum_i m_i R_i^2) \omega^2$$

o, recordando la definición (10.2) del momento de inercia

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (10.16)$$

La expresión (10.16) es correcta para cualquier eje aún si no fuera principal, ya que la magnitud de la velocidad es siempre  $v_i = \omega R_i$ , como puede inferirse de la discusión de la sección 10.2. Cuando la rotación es con respecto a un eje principal, podemos utilizar la ec. (10.4) y escribir

$$E_k = \frac{L^2}{2I}. \quad (10.17)$$

Podemos obtener otra expresión más general que (10.17) de la energía cinética utilizando las componentes de  $\omega$  a lo largo de los ejes principales  $X_0 Y_0 Z_0$ . El resultado, que no derivaremos, es

$$E_k = \frac{1}{2} (I_1 \omega_{x_0}^2 + I_2 \omega_{y_0}^2 + I_3 \omega_{z_0}^2).$$

Utilizando las componentes de  $L$  a lo largo de  $X_0 Y_0 Z_0$  de acuerdo con la ec. (10.5), podemos escribir

$$E_k = \frac{1}{2} \left( \frac{L_{x_0}^2}{I_1} + \frac{L_{y_0}^2}{I_2} + \frac{L_{z_0}^2}{I_3} \right),$$

expresión que se reduce a la ec. (10.17) para la rotación con respecto a un eje principal. De especial interés, particularmente en la discusión de las rotaciones moleculares, es el caso cuando el cuerpo tiene simetría de revolución, digamos con respecto a  $Z_0$ , de modo que  $I_1 = I_2$ . Luego

$$E_k = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{I_1} (L_{x_0}^2 + L_{y_0}^2) + \frac{1}{I_3} L_{z_0}^2 \right],$$

que puede escribirse en la forma alterna

$$E_k = \frac{L^2}{2I_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right) L_{z_0}^2.$$

Consideremos ahora el caso general en el cual el cuerpo rígido rota con respecto a un eje que pasa a través del centro de masa y al mismo tiempo tiene un movimiento relativo de traslación con respecto al observador. Como demostramos en el ejemplo 9.8, la energía cinética de un cuerpo en un sistema inercial de referencia es  $E_k = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + E_{k,CM}$ , en donde  $M$  es la masa total,  $v_{CM}$  es la velocidad del centro de masa, y  $E_{k,CM}$  es la energía interna respecto al centro de masa. En el caso de un cuerpo rígido,  $\frac{1}{2}Mv_{CM}^2$  es justamente la energía cinética de traslación, y por consiguiente,  $E_{k,CM}$  debe ser la energía cinética de rotación con respecto al centro de masa, calculada con la ayuda de la ec. (10.16). Esto es cierto ya que, en un cuerpo rígido, el centro de masa está fijo en el cuerpo, y el único movimiento que el cuerpo puede tener con respecto a su centro de masa es de rotación. Por consiguiente, podemos escribir

$$E_k = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2, \quad (10.18)$$

en la cual  $I_C$  es el momento de inercia con respecto al eje de rotación que pasa a través del centro de masa.

Ya que la distancia entre las partículas de un cuerpo rígido no cambia durante el movimiento, podemos suponer que su energía potencial interna  $E_{p,int}$ , permanece constante y, por consiguiente, no tenemos que considerarla cuando explicamos el intercambio de energía del cuerpo con sus alrededores. En concordancia, la conservación de la energía expresada por la ec. (9.35) de un sistema de partículas se reduce, en el caso de un cuerpo rígido, simplemente a

$$E_k - E_{k,0} = W_{ext}, \quad (10.19)$$

donde  $W_{ext}$  es el trabajo de las fuerzas externas. Si las fuerzas externas son conservativas, tenemos

$$W_{ext} = (E_{p,0} - E_p)_{ext}, \quad (10.20)$$

donde  $E_{p,ext}$  es la energía potencial asociada con las fuerzas externas, y la ec. (10.19) se convierte en (dejando de lado el subíndice "ext" de la energía potencial),

$$E_k + E_p = (E_k + E_p)_0. \quad (10.21)$$

Este resultado es similar a aquel de una partícula expresado por la ec. (8.29), y es una situación especial de la ec. (9.36) para el caso en el cual la energía potencial interna no cambia. (Debe recordarse que hemos expresado que esta falta de cambio tiene siempre lugar cuando se trata de un cuerpo rígido). Así llamamos  $E = E_k + E_p$  la energía total de un cuerpo rígido. Cuando utilizamos la ec. (10.18) para  $E_k$ , la ec. (10.21) para la energía total del cuerpo rígido toma la forma

$$E = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 + E_p = \text{const.}$$

Por ejemplo, si el cuerpo está cayendo bajo la acción de la gravedad,  $E_p = Mgy$ , en la cual  $y$  se refiere a la altura del cm del cuerpo con respecto a un plano horizontal de referencia, y la energía total es

$$E = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 + Mgy = \text{const.} \quad (10.22)$$

Si algunas de las fuerzas no son conservativas (en el sentido discutido en la sección 8.12), debemos escribir, en lugar de la ec. (10.20),

$$W_{\text{ext}} = E_{p,0} - E_p + W',$$

donde  $W'$  es el trabajo de las fuerzas externas no conservativas. La ec. (10.21) se expresa ahora como

$$(E_k + E_p) - (E_k + E_p)_0 = W'. \quad (10.23)$$

Esta expresión debe usarse, por ejemplo, cuando actúan fuerzas de fricción además de las fuerzas de gravitación.

**EJEMPLO 10.9.** Una esfera, un cilindro y un aro, todos del mismo radio ruedan hacia abajo sobre un plano inclinado partiendo de una altura  $y_0$ . Encontrar en cada caso la velocidad con la que llegan a la base del plano.

**Solución:** La figura 10-20 muestra las fuerzas que actúan sobre el cuerpo rodante. Ellas son el peso  $Mg$ , la reacción  $N$  del plano, y la fuerza de fricción  $F$  en el punto de contacto con el plano. Podríamos aplicar el mismo método utilizado en el ejemplo 10.5 (y recomendamos que el alumno lo haga). En su lugar, ilustraremos la solución aplicando el principio de conservación de la energía, expresado por la ec. (10.22).

En el punto de partida  $B$ , cuando el cuerpo se encuentra en reposo a una altura  $y_0$ , su energía total es  $E = Mgy_0$ . En cualquier posición intermedia, el centro de masa se mueve con una velocidad de traslación  $v$  y el cuerpo rota con respecto al centro de masa con velocidad angular  $\omega$ , estando ambas relacionadas en este caso por  $v = R\omega$ . La energía total es por consiguiente

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 + Mgy = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}(I_c/R^2)v^2 + Mgy.$$

Escribiendo el momento de inercia como  $I_c = MK^2$ , donde  $K$  es el radio de giro de acuerdo con la definición (10.10), podemos expresar la energía total como

$$E = \frac{1}{2}M \left( 1 + \frac{K^2}{R^2} \right) v^2 + Mgy.$$

Igualando esta expresión de la energía a la energía inicial  $E = Mgy_0$ , obtenemos la siguiente expresión

$$v^2 = \frac{2g(y_0 - y)}{1 + (K^2/R^2)}.$$

Si, en lugar de un cuerpo rígido rodante, tuviéramos un cuerpo que resbalara sobre el plano, no tendríamos que incluir la energía rotacional, y el resultado sería  $v^2 = 2g(y_0 - y)$ , igual que para una partícula simple. Vemos así que el movimiento de rotación hace que el movimiento de traslación sea más lento. Podemos entender esto si comprendemos que en un cuerpo rodante la energía potencial inicial debe utilizarse para producir tanto energía cinética de rotación como de traslación. Por el contrario, cuando el cuerpo se

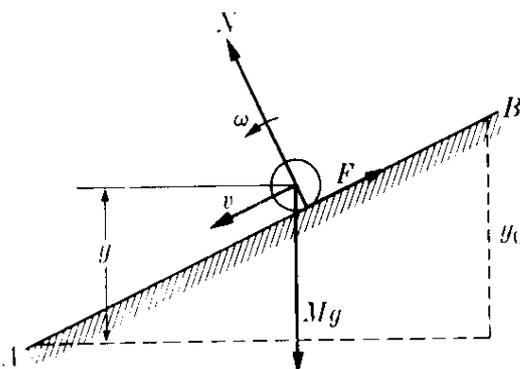


Fig. 10-20. Rodamiento de un cuerpo a lo largo de un plano.

desliza sobre el plano, toda la energía potencial inicial se transforma en energía cinética de traslación.

Refiriéndonos a la tabla 10-1, vemos que  $K^2/R^2$  es igual a  $\frac{2}{5}$  para la esfera,  $\frac{1}{2}$  para el disco y 1 para el aro. Por consiguiente, encontramos que  $v^2$  es igual a  $\frac{10}{7}g(y-y_0)$  para la esfera,  $\frac{4}{3}g(y-y_0)$  para el cilindro y  $g(y-y_0)$  para el aro. En otras palabras, la esfera es la más veloz, luego le sigue el cilindro y finalmente el aro. Examinando la geometría de los cuerpos, ¿podría el estudiante haber adivinado este resultado?

Un resultado interesante derivado de la expresión de  $v^2$  es que la velocidad de un cuerpo que desciende sobre una pendiente no depende de la masa o de las dimensiones del cuerpo, sino solamente de la forma.

## 10.6 Movimiento giroscópico

Como se indicó en la sección 10.4 la ecuación  $d\mathbf{L}/dt = \boldsymbol{\tau}$  implica que en la ausencia de un torque externo  $\boldsymbol{\tau}$ , el momentum angular  $\mathbf{L}$  del cuerpo permanece constante. Si el cuerpo está rotando con respecto a un eje principal  $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$  y, como se explicó antes, el cuerpo seguirá rotando con respecto a dicho eje con velocidad angular constante.

Este hecho se ilustra mejor por el *giróscopo* (Fig. 10-21), el cual es un instrumento que permite montar una rueda giratoria de modo que el eje puede cambiar libremente de dirección. La rueda  $G$  está montada sobre la varilla horizontal  $AB$  y es balanceada por un peso  $W$  de modo que el torque total alrededor de  $O$  es cero. La varilla  $AB$  puede moverse libremente, tanto con respecto al eje  $X_0$  como al eje  $Z_0$ , y la rueda está rotando (o girando) rápidamente alrededor del eje  $Y_0$ ; estos son los ejes principales del giróscopo. Por consiguiente, el momentum angular del sistema es paralelo al eje  $Y_0$  cuando este eje está fijo en el espacio. Si desplazamos el giróscopo alrededor del laboratorio notamos que  $AB$  siempre

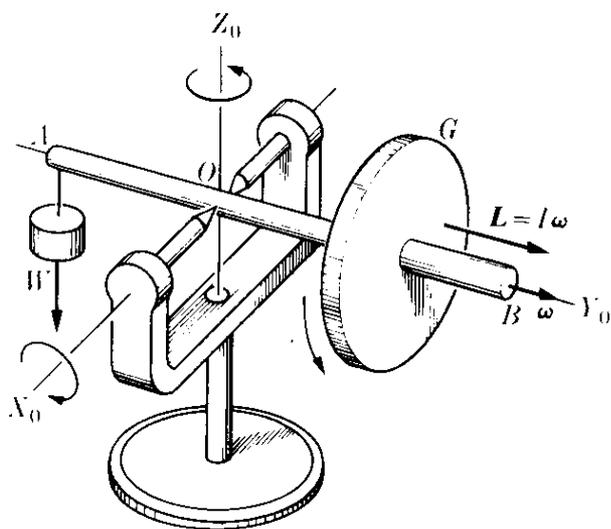


Fig. 10-21. Giróscopo no sometido a ningún torque.

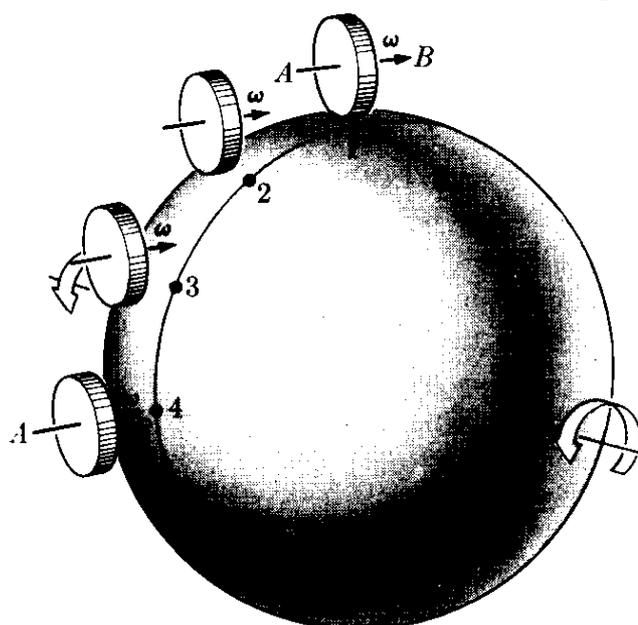


Fig. 10-22. El eje de rotación de un giróscopo no sometido a torques permanece fijo en el espacio, y por consiguiente, rota con respecto a la tierra.

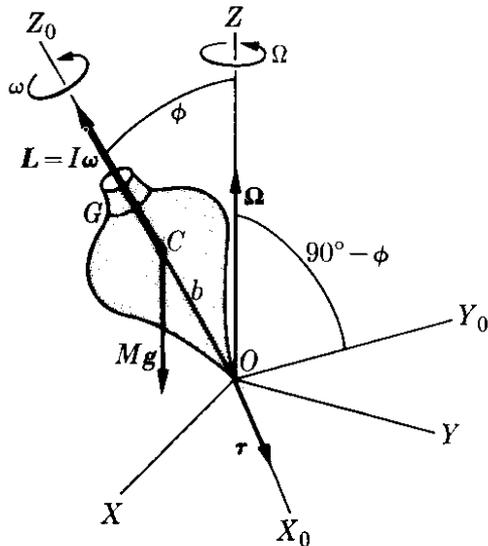


Fig. 10-23. Giróscopo sujeto a un torque externo.

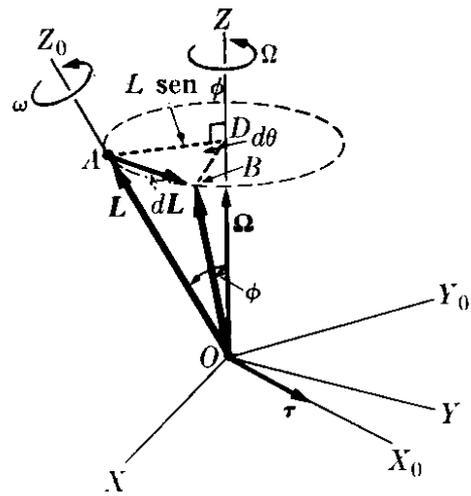


Fig. 10-24. Precesión del eje del giróscopo.

señala en la misma dirección. Colocando el eje del giroscopio de modo que  $AB$  sea horizontal y señale en la dirección este-oeste (posición 1 de la Fig. 10-22, donde  $N$  representa el polo norte de la tierra y la flecha indica la velocidad angular de la rueda), observaremos que  $AB$  gira gradualmente de modo que después de 6 horas se encuentra en una posición vertical (posición 4 de la Fig. 10-22). Esta rotación aparente de  $AB$  se debe en realidad a la rotación de la tierra, y mientras que nuestro laboratorio se desplaza del 1 al 4, la orientación de  $AB$  permanece fija en el espacio.

Si el torque aplicado al giróscopo no es cero, el momentum angular experimenta un cambio en el tiempo  $dt$  dado por

$$d\mathbf{L} = \boldsymbol{\tau} dt. \tag{10.24}$$

En otras palabras, el cambio en el momentum angular tiene siempre la dirección del torque (en la misma manera que el cambio de la cantidad de movimiento de una partícula tiene la dirección de la fuerza), una situación que ya hemos encontrado en el ejemplo 10.7. De hecho, la discusión que a continuación sigue guarda una gran semejanza con aquella del ejemplo 10.7, pero hay una diferencia fundamental: aquí el momentum angular proviene principalmente del espín del giróscopo, mientras que en el sistema de la Fig. 10-16 el momentum angular provino de la rotación alrededor del eje  $Z$ , sin ningún espín.

Si el torque es perpendicular al momentum angular  $\mathbf{L}$ , el cambio  $d\mathbf{L}$  es también perpendicular a  $\mathbf{L}$  y el momentum angular cambia de dirección pero no de magnitud. Esto es, el eje de rotación cambia de dirección pero la magnitud del momentum angular permanece constante. Como dijimos en el ejemplo 10.7, esta situación es similar al caso del movimiento circular bajo una fuerza centrípeta, en la cual la fuerza es perpendicular a la velocidad y la velocidad cambia de dirección pero no en magnitud. El movimiento del eje de rotación alrededor de un eje fijo debido a un torque externo se llama *precesión*, como se indicó previamente en el ejemplo 10.7.

Esta situación se encuentra, por ejemplo, en el trompo común, un juguete que es una especie de giroscopio (Fig. 10-23). Nótese que para el trompo el eje principal  $X_0$  se ha tomado en el plano  $XY$ , y por ello  $Y_0$  queda en el plano determinado por  $Z$  y  $Z_0$ . Debido a la simetría cilíndrica del trompo, los ejes principales  $X_0Y_0Z_0$  no están girando con velocidad angular  $\omega$ . El origen de ambos sistemas de coordenadas se ha escogido en el punto  $O$ , el cual está fijo en un sistema inercial de referencia. Por ello, tanto  $\mathbf{L}$  como  $\boldsymbol{\tau}$  deben calcularse con respecto a  $O$ . Cuando el trompo rota alrededor de su eje de simetría  $OZ_0$  con velocidad angular  $\omega$ , su momentum angular  $\mathbf{L}$  es también paralelo a  $OZ_0$ . El torque externo  $\boldsymbol{\tau}$  se debe al peso  $M\mathbf{g}$  que actúa en el centro de masa  $C$  y es igual al producto vectorial  $(\overline{OC}) \times (M\mathbf{g})$ . El torque  $\boldsymbol{\tau}$  es, por consiguiente, perpendicular al plano  $Z_0OZ$ , y por lo tanto también perpendicular a  $\mathbf{L}$ . En magnitud,

$$\tau = Mgb \sin \phi, \quad (10.25)$$

donde  $\phi$  es el ángulo entre el eje de simetría  $Z_0$  y el eje vertical  $Z$ , y  $b = OC$  da la posición del centro de masa.

Como se indicó en la Fig. 10-24, en un pequeño intervalo  $dt$  el vector  $\mathbf{L}$  cambia de la posición  $OA$  a la posición  $OB$ , siendo su cambio  $\overline{AB} = d\mathbf{L}$ , paralelo a  $\boldsymbol{\tau}$ . El extremo del vector  $\mathbf{L}$  describe un círculo alrededor de  $Z$  de radio  $AD = OA \sin \phi = L \sin \phi$ , y en un tiempo  $dt$  el radio  $AD$  se desplaza en un ángulo  $d\theta$  a la posición  $BD$ . La velocidad angular de precesión  $\Omega$  se define como la velocidad a la cual el eje del cuerpo  $OZ_0$  rota alrededor del eje  $OZ$  fijo en el laboratorio; esto es,

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt}, \quad (10.26)$$

y está representado por un vector paralelo a  $OZ$ . La magnitud de  $d\mathbf{L}$  es

$$|d\mathbf{L}| = AD d\theta = (L \sin \phi) (\Omega dt).$$

Pero de la ec. (10.24) tenemos que  $|d\mathbf{L}| = \tau dt$ . Luego, igualando ambos resultados, podemos escribir

$$\Omega L \sin \phi = \tau \quad (10.27)$$

o, usando la ec. (10.25) para el torque, obtenemos

$$\Omega = \frac{\tau}{L \sin \phi} = \frac{Mgb}{I\omega}. \quad (10.28)$$

Notando la orientación relativa de los vectores  $\boldsymbol{\Omega}$ ,  $\mathbf{L}$  y  $\boldsymbol{\tau}$  en la Fig. 10-24, vemos que la ec. (10.27) puede escribirse en la forma vectorial

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L} = \boldsymbol{\tau}, \quad (10.29)$$

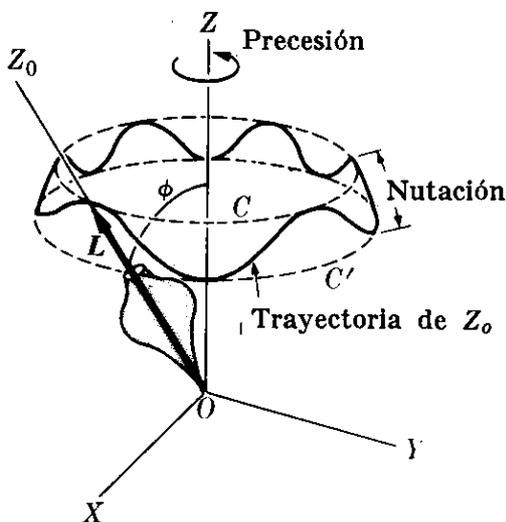


Fig. 10-25. Precesión y nutación del eje del giroscopio.

la cual es una expresión muy útil. Debía compararse con la expresión similar  $\omega \times \mathbf{p} = \mathbf{F}$  para el movimiento circular, dada por la ec. (7.30), ya que ambas representan la misma relación matemática entre los vectores involucrados.

Los resultados (10.27) y (10.28) son aproximados. Son válidos si  $\omega$  es muy grande en comparación  $\Omega$ , una situación compatible con la ec. (10.28). La razón es que si el cuerpo está precesando alrededor de  $OZ$  tiene también un momentum angular alrededor de dicho eje y, por consiguiente, su momentum angular no es  $I\omega$ , como supusimos, sino que la velocidad angular resultante es  $\omega + \Omega$ . Sin embargo, si la precesión es muy lenta (esto es si  $\Omega$  es muy pequeña comparada con  $\omega$ ), el momentum angular con respecto a  $OZ$  puede desprejarse, como implícitamente lo hicimos en nuestros cálculos. Nuestra derivación es entonces aplicable.

Una discusión más detallada indica que en general el ángulo  $\phi$  no permanece constante, sino que oscila entre dos valores fijos, de modo que el extremo de  $\mathbf{L}$ , al mismo tiempo que precesa alrededor de  $Z$ , oscila entre los dos círculos  $C$  y  $C'$  (Fig. 10-25), describiendo la trayectoria indicada. Este movimiento oscilatorio del eje  $Z'$  se denomina *nutación*. La nutación, al igual que la precesión, contribuye al momentum angular total, pero en general, su contribución es aún menor que la de la precesión.

Los fenómenos giroscópicos tienen amplia aplicación. La tendencia de un giróscopo a mantener el eje de rotación fijo en el espacio es un principio el cual es utilizado en la estabilización a bordo de los barcos y en los pilotos automáticos de los aviones. Otro ejemplo interesante del movimiento giroscópico es la *precesión de los equinoccios*, como se discutió en la sección 2.3. El plano del Ecuador hace un ángulo de  $23^\circ 27'$  con el plano de la órbita terrestre o *eclíptica*. La intersección de los dos planos es la *línea de los equinoccios*. La tierra es un giróscopo gigante cuyo eje de rotación es esencialmente la línea que pasa a través de los polos norte y sur. Este eje está precesando alrededor de la normal al plano de la eclíptica en la dirección este-oeste, como se indica en la Fig. 10-26, con un período de 27.725 años o con una velocidad angular de precesión alrededor de  $50,27''$  de arco por año, ó  $7,19 \times 10^{-11}$  rad  $s^{-1}$ . Esta precesión del eje de la tierra da lugar a un cambio igual en la dirección de la línea de los equinoccios, un efecto que fue descubierto alrededor del año 135 A.C. por Hiparco.

La precesión de los equinoccios se debe al torque ejercido sobre la tierra por el sol y la luna. La tierra no es una esfera pero se aproxima a un elipsoide, con el diámetro mayor en el plano ecuatorial (realmente la tierra tiene la forma de una pera). Cálculos detallados han mostrado que esta forma geométrica, combinada con la inclinación del eje de la tierra respecto a la eclíptica, dan como resultado que las fuerzas ejercidas por el sol y la luna sobre la tierra tengan un torque resultante respecto al centro de masa de la tierra. La dirección del torque es perpendicular al eje de la tierra. El eje de rotación de la tierra debe entonces de precesar bajo la acción de este torque. En el capítulo 15 veremos que un efecto similar (aunque las razones físicas son diferentes) está presente cuando una partícula cargada, tal como un electrón o un protón, se mueve en un campo magnético. El eje de la tierra experimenta también una nutación con una amplitud de  $9,2''$  y un período de oscilación de 19 años.

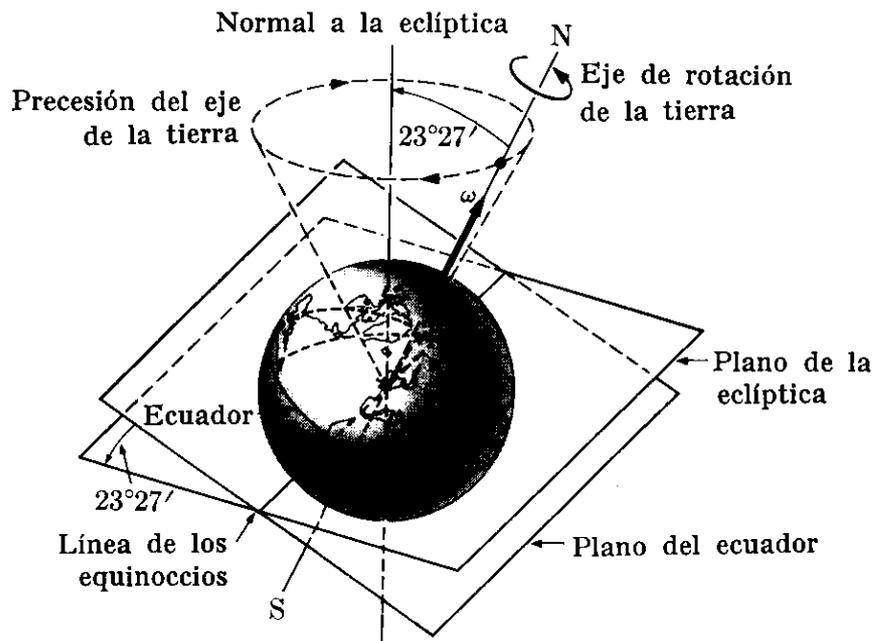


Fig. 10-26. Precesión del eje de rotación de la tierra.

Otra aplicación del movimiento giroscópico, también asociada al movimiento de la tierra, es el *compás giroscópico*. Supongamos que tenemos un giróscopo en la posición *G* de la Fig. 10-27, donde la flecha 1 indica el sentido de rotación de la tierra.

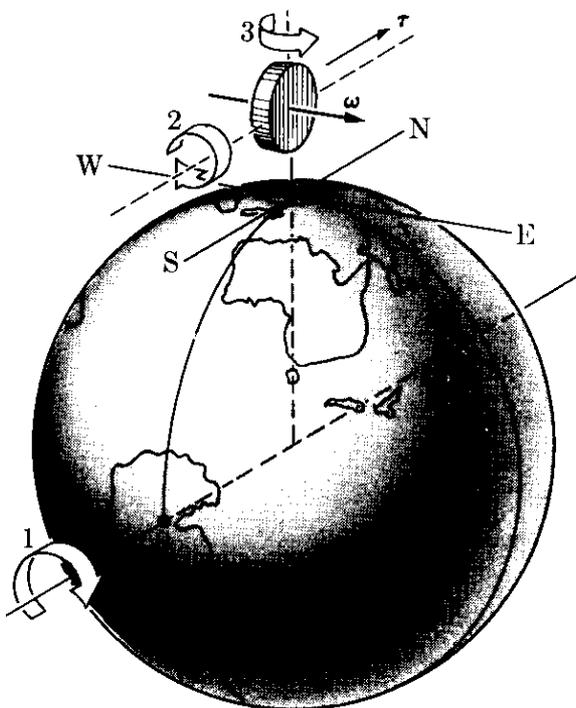


Fig. 10-27. Brújula giroscópica.

El giróscopo está situado de modo que su eje debe conservarse en la posición horizontal. Esto puede lograrse si el giróscopo flota en un líquido. Supongamos que inicialmente el eje del giróscopo señala en la dirección E-W. Cuando la tierra rota el plano horizontal y la dirección E-W rotan de la misma manera. Por consiguiente, si el eje del giróscopo fuera mantenido en la dirección E-W, el eje tendría que rotar como lo indica la flecha 2. Pero ello es equivalente a aplicar un torque en la dirección sur-norte. Por lo tanto, el eje del giróscopo, bajo la acción de este torque girará alrededor de la vertical hasta que señale el norte, como indica la flecha 3. La brújula giroscópica tiene la ventaja especial de señalar hacia el norte verdadero, ya que no está sujeta a anomalías magnéticas locales.

**EJEMPLO 10.10.** Estimar la magnitud del torque que debe ejercerse sobre la tierra a fin de producir la precesión observada de los equinoccios.

**Solución:** Utilizando la ec. (10.27) tenemos que  $\tau = \Omega L \sin \phi$ , donde

$$\phi = 23^\circ 27' \quad \text{y} \quad \Omega = 7,19 \times 10^{-11} \text{ rad s}^{-1}$$

es la velocidad angular de precesión de la tierra. Debemos primero calcular el momentum angular de la tierra. Ya que el eje de rotación de la tierra se desvía ligeramente de un eje principal, podemos utilizar la relación  $L = I\omega$ . El valor de  $\omega$  fue dado en el ejemplo 5.11 como  $7,29 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$ . El momento de inercia de la tierra, de la tabla 10-1, suponiendo que la tierra es esférica, es

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{5}MR^2 = \frac{2}{5}(5,98 \times 10^{24} \text{ kg})(6,38 \times 10^6 \text{ m})^2 \\ &= 9,72 \times 10^{37} \text{ m}^2 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Luego  $\tau = 2,76 \times 10^{27} \text{ N m}$ .

**TABLA 10-2** Comparación entre las dinámicas de traslación y rotación

Traslación		Rotación	
Momentum lineal	$p = mv$	Momentum angular	$L = I\omega^*$
Fuerza	$F = dp/dt$	Torque	$\tau = dL/dt$
Cuerpo de masa constante	$F = ma$	Cuerpo de momento de inercia constante	$\tau = I\alpha^*$
Fuerza perpendicular al momentum	$F = \omega \times p$	Torque perpendicular al momentum angular	$\tau = \Omega \times L$
Energía cinética	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	Energía cinética	$R_k = \frac{1}{2}I\omega^2$
Potencia	$P = F \cdot v$	Potencia	$P = \tau \cdot \omega$

\* Las fórmulas marcadas con un asterisco son válidas solamente para la rotación alrededor de un eje principal.

### Bibliografía

1. "Moments of Inertia of Solid Rectangular Parallelepipeds, Cubes, and Twin Cubes, and Two Other Regular Polyhedra", J. Satterly, *Am. J. Phys.* **25**, 70 (1957)
2. "Moments of Inertia of Plane Triangles", J. Satterly, *Am. J. Phys.* **26**, 452 (1958)
3. "Elementary Analysis of the Gyroscope", E. Barker, *Am. J. Phys.* **28**, 808 (1960)
4. "Resource Letter CM-1 on the Teaching of Angular Momentum and Rigid Body Motion", John I. Shonle, *Am. J. Phys.* **33**, 879 (1965)
5. *Mechanics* (segunda edición), por K. Symon. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1964, caps. 6 y 11
6. *Physical Mechanics* (tercera edición), por R. B. Lindsay. Princeton, N.J.: Van Nostrand, 1963, cap. 7

7. *Introduction to Engineering Mechanics*, por J. Huddleston. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1961, secs. 10-1, 10-2, 10-3, caps. 12 y 13
8. *Vector Mechanics*, por D. Christie. New York: McGraw-Hill, 1964, caps. 13, 15 y 16
9. *A Source Book of Physics*, por W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963; pág. 65, Poinsot
10. *The Feynman Lectures on Physics*, vol. I, por R. Feynman, R. Leighton y M. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, caps. 18, 19 y 20

### Problemas

10.1 Una varilla delgada de 1 m de largo tiene una masa despreciable. Se colocan 5 cuerpos a lo largo de ella cada uno con una masa de 1,00 kg, y situados a 0 cm, 25 cm, 50 cm, 75 cm y 100 cm de uno de sus extremos. Calcular el momento de inercia del sistema con respecto a un eje perpendicular a la varilla, el cual pasa a través de (a) un extremo, (b) la segunda masa, (c) el centro de masa. Calcular el radio de giro en cada caso. Verificar el teorema de Steiner.

10.2 Resolver el problema anterior; esta vez cuando la masa de la varilla es de 0,20 kg.

10.3 Tres masas, cada una de 2 kg, están situadas en los vértices de un triángulo equilátero cuyos lados miden cada uno 10 cm. Calcular el momento de inercia del sistema y su radio de giro con respecto a un eje perpendicular al plano determinado por el triángulo y que pase a través (a) de un vértice, (b) del punto medio de un lado, (c) del centro de masa.

10.4 Demostrar que el momento de inercia de un sistema constituido por dos masas  $m_1$  y  $m_2$ , separadas por una distancia  $r$  con respecto a un eje que pasa a través de su centro de masa y perpendicular a la línea que une las dos masas, es  $\mu r^2$ , siendo  $\mu$  la masa reducida del sistema. Aplicarlo a la molécula de CO ( $r = 1,13 \times 10^{-10}$  m) y a la molécula de HCl ( $r = 1,27 \times 10^{-10}$  m).

10.5 Encontrar el momento de inercia de la molécula de CO<sub>2</sub> con respecto a un eje que pasa a través del centro de

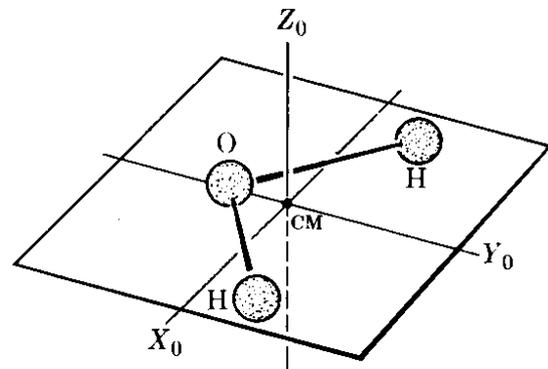


Figura 10-28

masa y es perpendicular al eje. La molécula es lineal y el átomo de C se encuentra en el centro. La distancia C—O es de  $1,13 \times 10^{-10}$  m.

10.6 En la molécula de H<sub>2</sub>O, la distancia H—O es de  $0,91 \times 10^{-10}$  m y el ángulo entre las uniones H—O es de 105°. Determinar los momentos de inercia de la molécula respecto a los tres ejes principales mostrados en la Fig. 10-28, y que pasan a través del centro de masa. Expresar el momentum angular y la energía cinética de la molécula respecto a los ejes principales cuando la molécula está rotando con respecto a un eje arbitrario.

10.7 La molécula de NH<sub>3</sub> (Fig. 10-29) es una pirámide con el átomo de N en el vértice y los tres átomos de H en la base. La longitud de la unión N—H es de  $1,01 \times 10^{-10}$  m y el ángulo entre dichas uniones es de 108°. Encontrar los tres momentos principales de inercia con respecto a los ejes que pasan por el centro de masa. (Los tres ejes están orientados como sigue:  $Z_0$  es perpendicu-

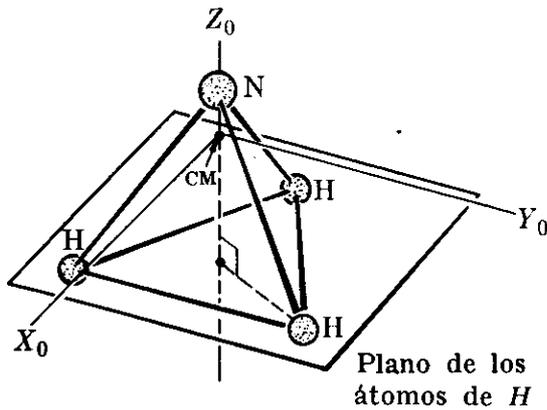


Figura 10-29

lar a la base,  $X_0$  se encuentra en el plano determinado por una unión N—H y el eje  $Z_0$  e  $Y_0$  es paralelo a la línea que une los otros dos átomos de H).

10.8 Dos niños, cada uno con una masa de 25 kg están sentados en extremos opuestos de una plancha horizontal de 2,6 m de largo y una masa de 10 kg. La plancha está rotando a 5 rpm con respecto a un eje que pasa por su centro. ¿Cuál será la velocidad angular si cada niño se mueve 60 cm hacia el centro de la plancha sin tocar el piso? ¿Cuál es el cambio en la energía cinética de rotación del sistema?

10.9 Refiriéndose al problema anterior, suponer que, cuando los niños se encuentran en la posición inicial, se aplica una fuerza de 120 N perpendicular a la plancha a una distancia de 1 m del eje. Encontrar la aceleración angular del sistema.

10.10 El momento de inercia de una rueda es de 1000 lb pie<sup>2</sup>. En un cierto instante su velocidad angular es de 10 rad s<sup>-1</sup>. Después que rota 100 radianes, su velocidad angular es de 100 rad s<sup>-1</sup>. Calcular el torque aplicado a la rueda y el aumento en la energía cinética.

10.11 Una rueda que rota está sometida a un torque de 10 N m debido a la fricción en su eje. El radio de la rueda es de 0,6 m, su masa es de 100 kg, y está rotando a 175 rad s<sup>-1</sup>. ¿Cuánto demorará la rueda en detenerse? ¿Cuántas revoluciones dará antes de detenerse?

10.12 Un cilindro de 20 kg de masa y 0,25 m de radio está rotando a 1200

rpm con respecto a un eje que pasa por su centro. ¿Cuál es la fuerza tangencial necesaria para detenerla después de 1800 revoluciones?

10.13 Un disco con una masa de 50 kg y un radio de 1,80 m puede girar con respecto a su eje. Se ejerce una fuerza constante de 19,6 N en el borde del disco. Calcular (a) su aceleración angular, (b) el ángulo que describe, (c) su momento angular, y (d) su energía cinética después de 5 s.

10.14 La velocidad de un automóvil aumenta de 5 km hr<sup>-1</sup> a 50 km hr<sup>-1</sup> en 8 s. El radio de sus llantas es de 45 cm. ¿Cuál es su aceleración angular? La masa de cada llanta es de 30 kg y su radio de giro de 0,3 m. ¿Cuál es el momentum angular inicial y cuál el final de cada llanta?

10.15 La volante de una máquina de vapor tiene una masa de 200 kg y un radio de giro de 2 m. Cuando rota a 120 rpm la válvula de entrada del vapor se cierra. Suponiendo que la volante se detiene en 5 min, ¿cuál es el torque debido a la fricción en el eje de la volante? ¿Cuál es el trabajo realizado por el torque durante este tiempo?

10.16 Una carreta con una masa de 2000 g tiene cuatro ruedas, cada una de 6 cm de radio y 150 g de masa. Calcular la aceleración lineal de la carreta cuando se ejerce sobre ella una fuerza de 0,6 N.

10.17 Las partes rotantes de una máquina tienen una masa de 15 kg y un radio de giro de 15 cm. Calcular el momento angular y la energía cinética cuando rotan a 1800 rpm. ¿Qué torque y qué potencia son necesarios para alcanzar esta velocidad en 5 s?

10.18 El radio de una moneda de 5 centavos es de 5 cm y su masa es de 5 g. Rueda sobre un plano inclinado a 6 rps. Encontrar (a) su energía cinética de rotación, (b) su energía cinética de traslación y (c) su energía cinética total. ¿Cuál es la distancia vertical de la cual tendría que caer a fin de adquirir energía cinética?

10.19 Repetir el ejemplo 8.9, suponiendo que la bola tiene un radio  $r$  y

que rueda a lo largo del riel en lugar de resbalar.

10.20 El automóvil del Problema 10.14 tiene una masa de 1600 kg, y su velocidad aumenta en 8 s como se describe. Calcular (a) las energías cinética de rotación inicial y final de cada rueda, (b) la energía cinética total inicial y final de cada rueda, y (c) la energía cinética total final del automóvil.

10.21 Un camión con una masa de 10 toneladas se mueve con una velocidad de  $6,6 \text{ m s}^{-1}$ . El radio de cada llanta es de 0,45 m, su masa de 100 kg, y su radio de giro es de 30 cm. Calcular la energía cinética total del camión.

10.22 Un anillo de hierro cuyos radios miden 0,60 m y de 0,50 m tiene una masa de 18 kg. Rueda sobre un plano inclinado, llegando a la base con una velocidad de  $3,6 \text{ m s}^{-1}$ . Calcular la energía cinética total y la altura vertical de la cual cae.

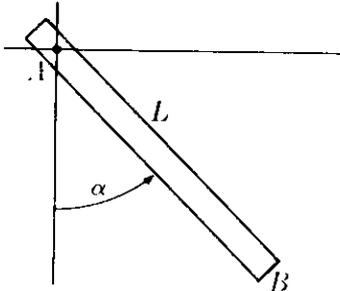


Figura 10-30

10.23 La varilla de la Fig. 10-30, cuya longitud es  $L$  y cuya masa es  $m$ , puede rotar libremente en un plano vertical alrededor de su extremo  $A$ . Inicialmente se coloca en una posición horizontal y luego se suelta. Cuando hace un ángulo  $\alpha$  con la vertical, calcular (a) su aceleración angular, (b) su velocidad angular, y (c) las fuerzas en el lugar de suspensión.

10.24 Una varilla uniforme, que cuelga verticalmente de un pivote tiene una longitud de 1,0 m y 2,5 kg de masa. Se le golpea en la base con una fuerza horizontal de 100 N, la que actúa durante  $\frac{1}{50}$  s. (a) Encontrar el momentum angular adquirido por la varilla. (b) ¿Adquirirá la varilla una posición vertical con el extremo libre sobre el pivote?

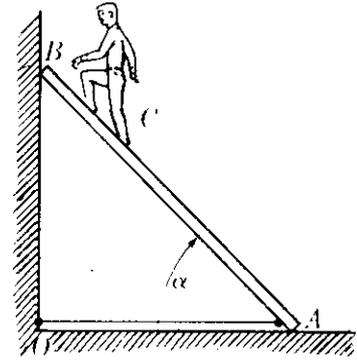


Figura 10-31

10.25 Una escalera  $AB$  de 3 m de longitud y 20 kg de masa reposa sobre una pared sin fricción (Fig. 10-31). El piso es liso y, para prevenir el deslizamiento, se le coloca la cuerda  $OA$ . Un hombre cuya masa es de 60 kg está parado a dos tercios de la base de la escalera. La soga se rompe repentinamente. Calcular (a) la aceleración inicial del centro de masa del sistema escalera-hombre y (b) la aceleración angular inicial alrededor del centro de masa. [Ayuda: Notar que la velocidad angular inicial de la escalera es cero.]

10.26. La varilla horizontal  $AB$  de la Fig. 10-32, sostenida por cojinetes sin fricción en sus extremos, puede girar libremente alrededor de su eje horizontal. Dos masas iguales se colocan como se muestra, mediante varillas de masas despreciables, simétricamente situadas con respecto al centro de la varilla. Encontrar (a) el momentum angular del sistema respecto al centro de masa cuando el sistema gira con velocidad angular  $\omega$ , y (b) las fuerzas sobre los cojinetes.

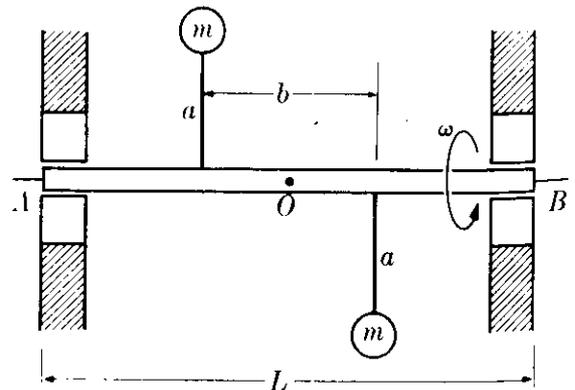


Figura 10-32

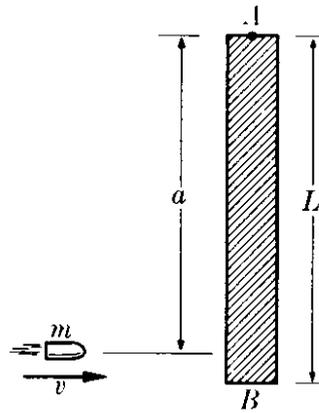


Figura 10-88

10.27 Una varilla de longitud  $L$  y masa  $M$  (Fig. 10-33) puede rotar libremente alrededor de un pivote en  $A$ . Una bala de masa  $m$  y velocidad  $v$  golpea la varilla a una distancia  $a$  de  $A$  y se incrusta en ella. (a) Encontrar el momentum angular del sistema con respecto a  $A$  inmediatamente antes y después de que la bala dé contra la varilla. (b) Determinar el momentum del sistema inmediatamente antes y después de la colisión. Explicar cuidadosamente su respuesta. (c) ¿Bajo qué condiciones se conservará el momentum? ¿Cuál es el  $Q$  de la colisión?

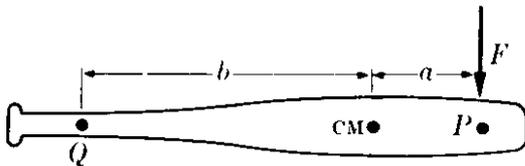


Figura 10-34

10.28 Una varilla de longitud  $L$  y masa  $m$  reposa sobre un plano horizontal sin fricción (Fig. 10-34). Durante un intervalo muy corto  $\Delta t$ , una fuerza  $F$  que actúa sobre aquella produce un impulso  $I$ . La fuerza actúa en un punto  $P$  situado a una distancia  $a$  del centro de masa. Encontrar (a) la velocidad del centro de masa, y (b) la velocidad angular con respecto al centro de masa. (c) Determinar el punto  $Q$  que inicialmente permanece en reposo en el sistema  $L$ , demostrando que  $b = K^2/a$ , siendo  $K$  el radio de giro con respecto al centro de masa. El punto  $Q$  se denomina *centro de percusión* (por ejemplo, un

jugador de beisbol debe sostener el bate en el centro de percusión para evitar sentir una sensación de dolor cuando él golpea la pelota.) Demostrar también que si la fuerza da en  $Q$ , el centro de percusión se encuentra en  $P$ .

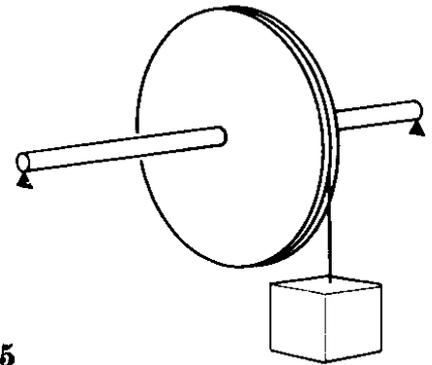


Figura 10-35

10.29 La rueda de la Fig. 10-35, que tiene un radio de 0,5 y una masa de 25 kg, puede girar con respecto a un eje horizontal. Una cuerda enrollada alrededor del eje tiene una masa de 10 kg que cuelga de su extremo libre. Calcular (a) la aceleración angular de la rueda, (b) la aceleración lineal del cuerpo, y (c) la tensión en la cuerda.

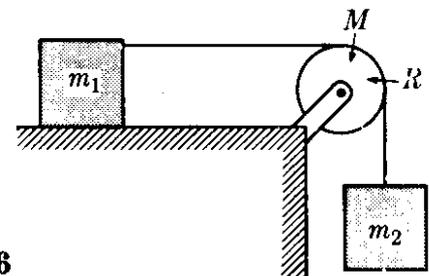


Figura 10-36

10.30. Calcular la aceleración del sistema de la Fig. 10-36 si el radio de la polea es  $R$ , su masa es  $m$ , y está girando debido a la fricción sobre la cuerda. En este caso  $m_1 = 50$  kg,  $m_2 = 200$  kg,  $M = 15$  kg y  $R = 10$  cm.

10.31 Una cuerda está enrollada alrededor del pequeño cilindro de la Fig. 10-37. Suponiendo que tiramos con una fuerza  $F$ , calcular la aceleración del cilindro. Determinar el sentido del movi-

miento. En este caso  $r = 3$  cm,  $R = 5$  cm,  $F = 0,1$  kgf y  $m = 1$  kg.

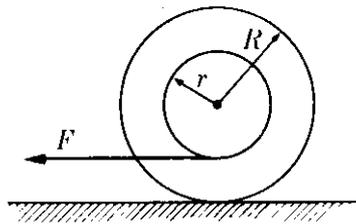


Figura 10-37

10.32 En el sistema representado en la Fig. 10-38,  $M = 1,0$  kg,  $m = 0,2$  kg,  $r = 0,2$  m. Calcular la aceleración lineal de  $m$ , la aceleración angular del cilindro  $M$ , y la tensión en la cuerda. Despreciar el efecto de la pequeña polea.

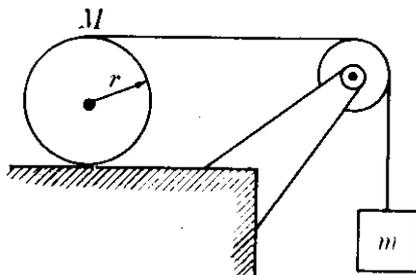


Figura 10-38

10.33 Determinar, para el sistema de la Fig. 10-39 la velocidad angular del disco y la velocidad lineal de  $m$  y  $m'$ . Calcular la tensión en cada cuerda. Suponer que  $m = 600$  g,  $m' = 500$  g,  $M = 800$  g,  $R = 8$  cm y  $r = 6$  cm.

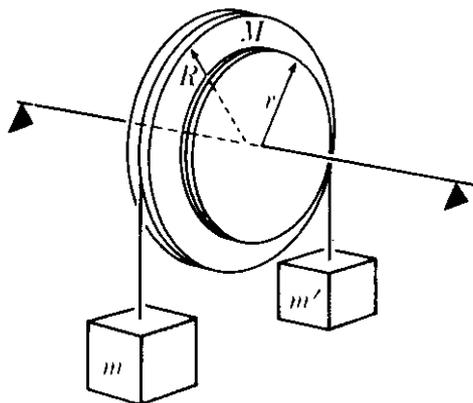


Figura 10-39

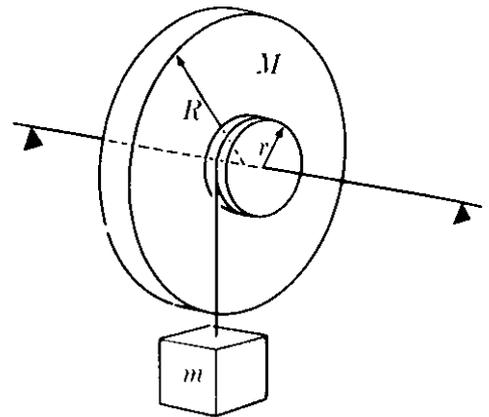


Figura 10-40

10.34 Para el sistema de la Fig. 10-40, calcular la aceleración de  $m$  y la tensión en la cuerda, suponiendo que el momento de inercia del pequeño disco de radio  $r$  es despreciable. En este caso  $r = 4$  cm,  $R = 12$  cm,  $M = 4$  kg, y  $m = 2$  kg.

10.35 En la Fig. 10-41,  $M = 6$  kg,  $m = 4$  kg,  $m' = 3$  kg y  $R = 0,40$  m. Calcular (a) la energía cinética total ganada por el sistema después de 5 s y (b) la tensión en la cuerda.

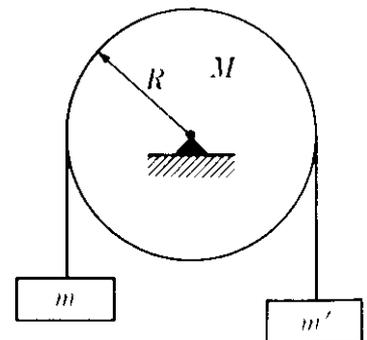


Figura 10-41

10.36 Los discos de la Fig. 10-42 tienen iguales masas  $m$  y radios  $R$ . El disco superior puede girar libremente alrededor de un eje horizontal a través de su centro. Una cuerda está enrollada alrededor de ambos discos y el disco inferior se deja caer. Encontrar (a) la aceleración del centro de masa del disco inferior, (b) la tensión en la cuerda y (c) la aceleración angular de cada disco con respecto a su centro de masa.

10.37 La masa del giróscopo de la Fig. 10-43 es de 0,10 kg. El disco, que está

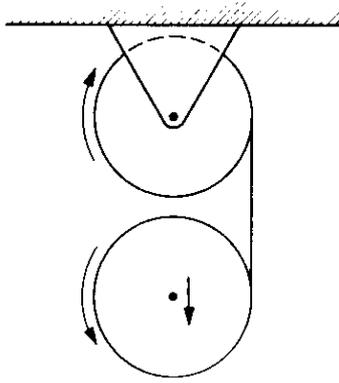


Figura 10-42

situado a 10 cm del eje  $ZZ'$ , tiene un radio de 5-cm y está girando alrededor del eje  $YY'$  con una velocidad angular de  $100 \text{ rad s}^{-1}$ . ¿Cuál es la velocidad angular de precesión?

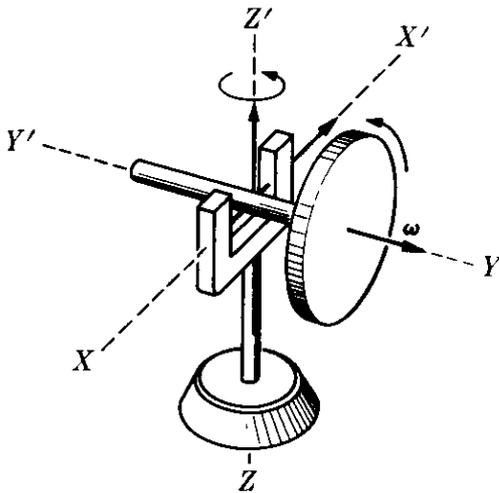


Figura 10-48

10.38 Para una demostración en clase, un giróscopo consiste de un anillo de metal de 0,35 m de radio, 5 kg de masa, el cual está unido por radios a un eje que sobresale 20 cm a cada lado. El demostrador sostiene el eje en una posición horizontal mientras que el anillo gira a 300 rpm. Encontrar la magnitud y la dirección de la fuerza ejercida por cada una de las manos del demostrador sobre el eje en los casos siguientes: (a) el eje se mueve paralelo a sí mismo; (b) el eje rota con respecto a su centro en un plano horizontal a 2 rpm; (c) el eje rota con respecto a su centro en un plano vertical a 2 rpm. Calcular también cuál

debe ser la velocidad angular del anillo a fin de que su eje permanezca horizontal si el giróscopo fuera sostenido solamente por una mano.

10.39 Demostrar que, para un cuerpo rígido  $dE_k/dt = \omega \cdot \tau$ . Esta ecuación demuestra que  $\omega \cdot \tau$  es la potencia rotacional. [Ayuda: Nótese que  $v = \omega \times r$  para un cuerpo rotante. En primer lugar obtener la ecuación para una partícula, utilizando la ec. (8.10), y luego sumar los resultados para obtener la ecuación para todas las partículas del cuerpo rígido.]

10.40 Nótese que cuando un cuerpo se mueve sin que actúe sobre él ningún torque, no sólo el momentum angular se mantiene constante sino también la energía cinética de rotación. Obtener la ecuación de la polhodia (ejemplo 10.8) encontrando la intersección de los elipsoides correspondientes a  $L^2$  y  $E_k$ . Analizar el resultado obtenido.

10.41 Demostrar que el momento de inercia de un cuerpo rígido con respecto a un eje que hace ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  con los tres ejes principales es

$$I = I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 \beta + I_3 \cos^2 \gamma.$$

10.42 Un bloque sólido de lados 0,20 m, 0,30 m, y 0,40 m y masa 4 kg está rotando con respecto a un eje que pasa a través de la diagonal mayor a 120 rpm. (a) Encontrar el momentum angular con referencia a los ejes principales. (b) Determinar el ángulo entre el momentum angular y el eje de rotación. (c) Encontrar la energía cinética de rotación. [Ayuda: Utilizar el resultado del Problema 10.41 para obtener el momento de inercia.]

10.43 En el bloque del problema anterior, suponer que la velocidad angular es constante. Determinar (a) el torque aplicado al bloque con respecto a los ejes principales, y (b) el ángulo entre el torque y el eje de rotación.

10.44 Una partícula de masa  $m$  se mueve alrededor de un eje con una velocidad angular  $\omega$  de modo que su velocidad es  $v = \omega \times r$ , de acuerdo a la ec. (5.48). Demostrar que las componen-

tes de su momentum angular son

$$L_x = m[\omega_x(y^2 + z^2) - \omega_y yx - \omega_z zx],$$

$$L_y = m[-\omega_x xy + \omega_y(z^2 + x^2) - \omega_z zy],$$

$$L_z = m[-\omega_x xz - \omega_y yz + \omega_z(x^2 + y^2)].$$

10.45 Extender el resultado del problema precedente al caso de un cuerpo rígido para obtener

$$L_x = I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{zx} \omega_z,$$

$$L_y = -I_{xy} \omega_x + I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z,$$

$$L_z = -I_{zx} \omega_x - I_{yz} \omega_y + I_z \omega_z,$$

en las cuales

$$I_x = \sum m(y^2 + z^2),$$

$$I_y = \sum m(z^2 + x^2),$$

$$I_z = \sum m(x^2 + y^2)$$

son los momentos de inercia con referencia a los tres ejes de coordenadas, de acuerdo a la ec. (10.7) y

$$I_{xy} = \sum mxy,$$

$$I_{yz} = \sum myz,$$

$$I_{zx} = \sum mzx$$

se denominan los *productos de inercia*. Comparando estos resultados con la ec. (10.5), el estudiante puede reconocer que los ejes principales son aquellos para los cuales los tres productos de inercia valen cero. Nótese también que el comportamiento rotacional de un cuerpo rígido está determinado por seis cantidades: los tres momentos de inercia y los tres productos de inercia.

10.46 Determinar los tres momentos de inercia y los tres productos de inercia del cuerpo de la Fig. 10-16 con respecto a (a) los ejes  $X_0$ -,  $Y_0$ -, y  $Z_0$ - (b) los ejes

$X'$ -,  $Y_0$ - y  $Z_0$ , y (c) los ejes  $X'$ -,  $Y_0$ - y  $Z$ . ¿Son siempre constantes estas cantidades?

10.47 Calcular los productos de inercia de las moléculas de  $H_2O$  y  $NH_3$  con respecto a los ejes ilustrados en los Problemas 10.6 y 10.7, y verificar que los ejes son principales.

10.48 Verificar la relación vectorial

$$(A \times B) \cdot (C \times D) \\ = (A \cdot C)(B \cdot D) - (A \cdot D)(B \cdot C).$$

Utilizarla para demostrar que en el cuerpo rígido del Problema 10.44,  $v^2 = (\omega \times r)^2 = \omega^2 r^2 - (v \cdot r)^2$ . Luego escribir su energía cinética en la forma

$$E_k = \frac{1}{2} m [\omega_x^2 (y^2 + z^2) + \omega_y^2 (z^2 + x^2) \\ + \omega_z^2 (x^2 + y^2) - 2\omega_x \omega_y xy \\ - 2\omega_y \omega_z yz - 2\omega_z \omega_x xz].$$

10.49 Extender el resultado del problema anterior para expresar la energía cinética de un cuerpo rígido rotante en la forma

$$E_k = \frac{1}{2} [I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2 \\ - 2I_{xy} \omega_x \omega_y - 2I_{yz} \omega_y \omega_z \\ - 2I_{zx} \omega_z \omega_x].$$

Nótese que se reduce a los valores dados en la sección 10.5 para el caso de los ejes principales cuando los productos de inercia son cero.

10.50 Resolver el ejemplo 10.7 encontrando primero los componentes de  $L$  paralelas a los ejes  $XYZ$  y calculando luego las componentes de  $\tau$  mediante la aplicación directa de la ec. (10.11). Considerar también el caso de rotación acelerada ( $d\omega/dt \neq 0$ ).