

# DINAMICA DE UN SISTEMA DE PARTICULAS

- 9.1 *Introducción*
- 9.2 *Movimiento del centro de masa de un sistema de partículas*
  - 9.3 *Masa reducida*
  - 9.4 *Momentum angular de un sistema de partículas*
  - 9.5 *Energía cinética de un sistema de partículas*
  - 9.6 *Conservación de la energía de un sistema de partículas*
    - 9.7 *Colisiones*
    - 9.8 *Sistemas de muchas partículas: temperatura*
    - 9.9 *Sistemas de muchas partículas: trabajo*
    - 9.10 *Sistemas de muchas partículas: calor*
  - 9.11 *Reformulación del principio de conservación de la energía para sistemas de muchas partículas*
    - 9.12 *Teorema del virial para muchas partículas*
      - 9.13 *Ecuación de estado de un gas*
      - 9.14 *Movimiento de un fluido*

**9.1 Introducción**

En los dos últimos capítulos hemos discutido la teoría de la dinámica de una partícula. En dicha teoría, ignoramos el resto del universo y lo representamos ya sea por una *fuerza* o por una *energía potencial*, que dependen solamente de las coordenadas de la partícula. Consideraremos ahora el problema más realista e importante de varias partículas. De hecho, fue con un sistema de partículas que empezamos nuestra discusión de la dinámica, cuando establecimos el principio de conservación del momentum en el capítulo 7. En la primera parte de este capítulo discutiremos tres resultados principales: el movimiento del centro de masa, la conservación del momentum angular y la conservación de la energía. En la segunda parte de este capítulo consideraremos sistemas compuestos de un gran número de partículas, los que requieren ciertas consideraciones de naturaleza estadística. A lo largo de este capítulo supondremos que las masas de las partículas son constantes.

**I. RELACIONES FUNDAMENTALES****9.2 Movimiento del centro de masa de un sistema de partículas**

Consideremos un sistema compuesto de partículas de masas  $m_1, m_2, \dots$ , y velocidades  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$ , relativas a un sistema inercial de referencia. Definiremos la *velocidad del centro de masa* por

$$\mathbf{v}_{\text{CM}} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{M}. \quad (9.1)$$

Si las masas de las partículas son independientes de las velocidades,  $\mathbf{v}_{\text{CM}}$  corresponde a la velocidad del punto definido en la sección 4.8 como el centro de masa, y dado por el vector posición

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M}. \quad (9.2)$$

Lo que podemos comprobar tomando la derivada temporal de la ec. (9.2),

$$\frac{d\mathbf{r}_{\text{CM}}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{M} = \mathbf{v}_{\text{CM}}.$$

Observando que  $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ , podemos escribir la ec. (9.1) también como

$$\mathbf{v}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_i \mathbf{p}_i = \frac{\mathbf{P}}{M} \quad \text{ó} \quad \mathbf{P} = M\mathbf{v}_{\text{CM}}, \quad (9.3)$$

donde  $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i$  es el momentum total del sistema. Esto sugiere que el momentum del sistema es el mismo que correspondería al caso en que toda la masa

del sistema estuviese concentrada en el centro de masa, moviéndose con velocidad  $v_{CM}$ . Por esta razón  $v_{CM}$  se llama algunas veces la *velocidad del sistema*. Por ello cuando hablamos de la velocidad de un cuerpo móvil compuesto de muchas partículas, tal como un aeroplano o un automóvil, la tierra o la luna, o aún una molécula o un núcleo, nos referimos en realidad a la velocidad de su centro de masa  $v_{CM}$ .

Si el sistema está aislado, sabemos por el principio de conservación del momentum que  $P$  es constante. Por consiguiente

*el centro de masa de un sistema aislado se mueve con velocidad constante con relación a un sistema inercial (suponiendo que las masas de las partículas son independientes de la velocidad).*

En particular, podemos fijar un sistema inercial de referencia en el centro de masa de un sistema aislado y, con relación a este sistema inercial, el centro de masa estará en reposo ( $v_{CM} = 0$ ). Este es el llamado *sistema de referencia del centro de masa o sistema-C de referencia*. En vista de la ec. (9.3), el momentum total de un sistema de partículas referido al sistema-C de referencia es siempre cero:

$$P_{CM} = \sum_i p_i = 0 \quad (\text{en el sistema-C de referencia}). \quad (9.4)$$

Por tal razón el sistema-C es llamado a veces el *sistema de momentum cero*. Este sistema-C es importante porque muchos experimentos realizados en nuestro laboratorio o sistema-L de referencia pueden ser analizados más simplemente en el sistema-C.

Consideraremos ahora lo que sucede cuando un sistema  $S$  no está aislado; en otras palabras cuando las componentes de  $S$  interactúan con otras partículas del universo que no pertenecen al sistema  $S$ . Supongamos que nuestro sistema  $S$  está compuesto de partículas situadas dentro de la línea punteada de la Fig. 9-1, y que las partículas de  $S$  interactúan con aquéllas fuera de la línea punteada que pertenecen a otro sistema  $S'$ . Podemos suponer que  $S$  y  $S'$  juntos forman un sistema aislado. Para considerar algunos ejemplos concretos, nuestro sistema  $S$

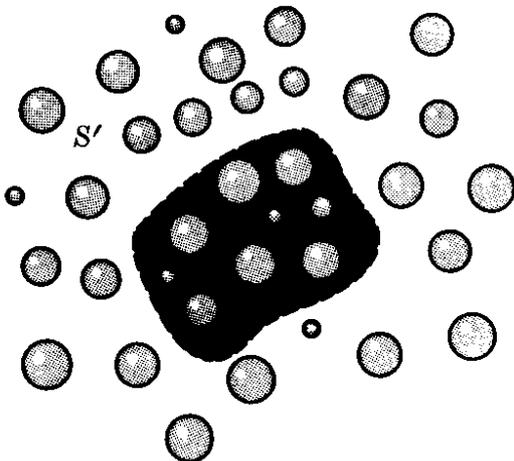


Fig. 9-1. Interacción entre dos sistemas  $S$  y  $S'$ .

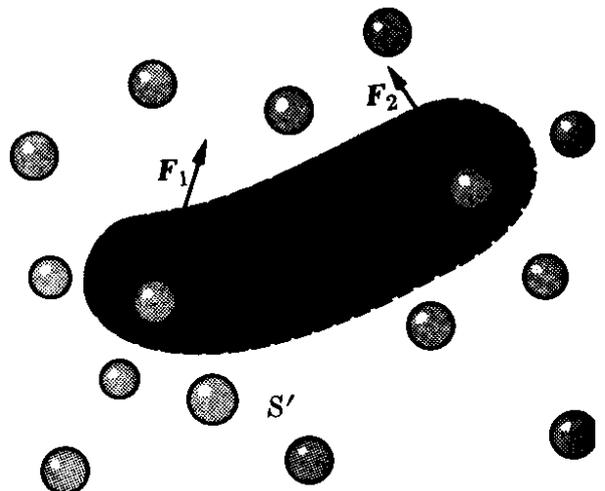


Fig. 9-2. Fuerzas externas e internas de un sistema  $S$ .

puede ser nuestra galaxia y  $S'$  puede ser el resto del universo. O también  $S$  puede ser el sistema solar y  $S'$  el resto del universo. Podemos aún considerar una molécula aislada, y agrupar los átomos que la componen en dos sistemas  $S$  y  $S'$ .

Designamos las partículas que pertenecen a  $S$  con el subíndice  $i$ , y aquellas que pertenecen a  $S'$  con el índice  $j$ . El principio de conservación del momentum para el sistema aislado completo  $S + S'$  da

$$\mathbf{P} = \underbrace{\sum_i \mathbf{p}_i}_{\text{Sistema } S} + \underbrace{\sum_j \mathbf{p}_j}_{\text{Sistema } S'} = \text{const}$$

ó

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_S + \mathbf{P}_{S'} = \text{const.} \quad (9.5)$$

Cualquier cambio en el momentum de  $S$  debe estar acompañado por un cambio igual y opuesto en el momentum de  $S'$ . Vale decir,

$$\Delta \mathbf{P}_S = - \Delta \mathbf{P}_{S'}$$

ó

$$\sum_i \Delta \mathbf{p}_i = - \sum_j \Delta \mathbf{p}_j. \quad (9.6)$$

Por consiguiente, la interacción entre los sistema  $S$  y  $S'$  puede ser descrita como un intercambio de momentum. El estudiante debiera comparar las ecs. (9.5) y (9.6) con las ecs. (7.5) y (7.8) para el caso particular de dos partículas y notar la similitud.

Tomando la derivada temporal de la ec. (9.5), tenemos

$$\frac{d\mathbf{P}_S}{dt} = - \frac{d\mathbf{P}_{S'}}{dt}. \quad (9.7)$$

Llamamos a la derivada temporal del momentum del sistema  $S$  la *fuerza externa* ejercida sobre  $S$ ; esto es

$$\frac{d\mathbf{P}_S}{dt} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad \text{ó} \quad \frac{d}{dt} (\sum_i \mathbf{p}_i) = \mathbf{F}_{\text{ext}}. \quad (9.8)$$

Decimos fuerza externa porque el cambio de momentum de  $S$  es debido a su interacción con  $S'$ . Las *fuerzas internas* que existen en  $S$  debidas a las interacciones entre sus partículas componentes no producen ningún cambio en el momentum total, de acuerdo con el principio de conservación del momentum. Luego si  $\mathbf{F}'_{\text{ext}}$  es la fuerza externa sobre el sistema  $S'$ , la ec. (9.7) requiere que  $\mathbf{F}_{\text{ext}} = -\mathbf{F}'_{\text{ext}}$ , lo que constituye la ley de acción y reacción para las interacciones entre los sistemas  $S$  y  $S'$ .

Ya que, por la ec. (9.3), la velocidad del centro de masa de  $S$  es  $\mathbf{v}_{\text{CM}} = \mathbf{P}_S/M$ , tenemos a partir de la ec. (9.8) que

$$\mathbf{F}_{\text{tex}} = M \frac{d\mathbf{v}_{\text{CM}}}{dt} = M\mathbf{a}_{\text{CM}}. \quad (9.9)$$

Comparando este resultado con la ec. (7.15) vemos que

*el centro de masa de un sistema de partículas se mueve como si fuera una partícula de masa igual a la masa total del sistema sujeta a la fuerza externa aplicada al sistema.*

Los resultados expresados por las ecs. (9.6), (9.7), (9.8) y (9.9) indican claramente que la interacción entre dos sistemas de partículas puede ser descrita formalmente en términos idénticos a los introducidos en el capítulo 7 para dos partículas. Esto justifica, *a posteriori*, la manera informal en que ilustramos las aplicaciones del principio de la dinámica en el capítulo 7 (donde cuerpos y no partículas fueron tratados) en casos tales como la interacción entre la tierra y la luna, entre dos moléculas, o en el movimiento de un cohete o de un automóvil.

Es interesante relacionar  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  con las fuerzas que actúan sobre cada partícula. Por simplicidad supongamos que nuestro sistema  $S$  está compuesto de dos partículas (Fig. 9-2). Designemos con  $\mathbf{F}_{12}$  la fuerza *interna* sobre la partícula  $m_1$  debida a su interacción con  $m_2$ , y con  $\mathbf{F}_{21}$  la fuerza *interna* sobre  $m_2$  debida a su interacción con  $m_1$ . La ley de acción y reacción requiere que

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}. \quad (9.10)$$

Sea  $\mathbf{F}_1$  la fuerza externa resultante sobre  $m_1$  debida a su interacción con otras partículas y  $\mathbf{F}_2$  la fuerza externa sobre  $m_2$ . Para obtener la ecuación del movimiento de cada partícula bajo la acción de todas las fuerzas que actúan sobre ella, aplicamos la ecuación (7.12):

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12}, \quad \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21}.$$

Sumando dichas ecuaciones y usando la ec. (9.10) de manera que  $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0$ , encontramos que

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2. \quad (9.11)$$

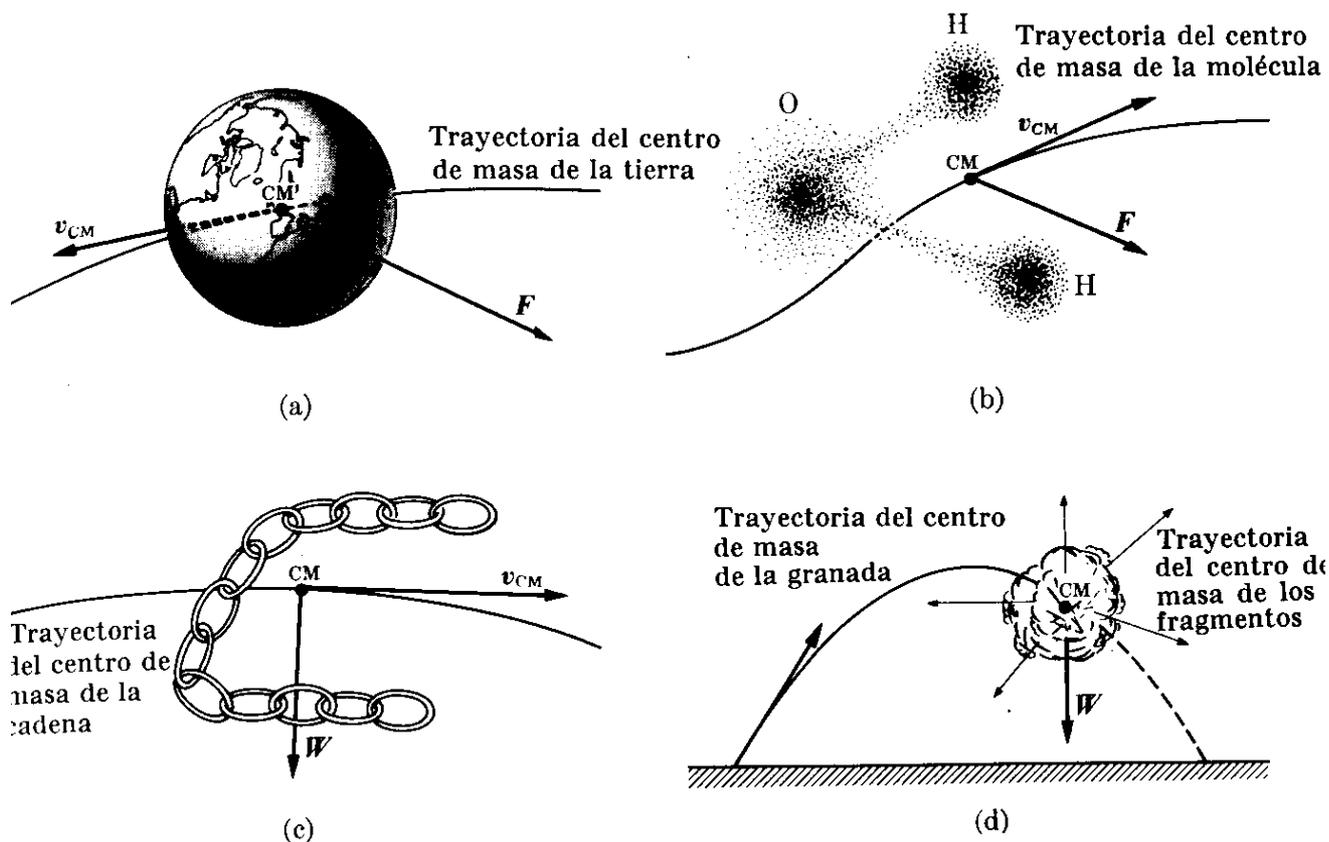
Por consiguiente, el cambio total por unidad de tiempo del momentum del sistema compuesto por  $m_1$  y  $m_2$  es igual a la suma de las *fuerzas externas* aplicadas sobre  $m_1$  y  $m_2$ . En general, para un sistema compuesto de un número arbitrario de partículas,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (\Sigma_i \mathbf{p}_i) = \Sigma_i \mathbf{F}_i, \quad (9.12)$$

donde  $\mathbf{F}_i$  es la fuerza *externa* sobre la partícula  $m_i$ . La comparación con la ec. (9.8) indica que

*la fuerza externa sobre un sistema de partículas es la suma de las fuerzas externas sobre cada una de las partículas del sistema.*

Consideremos algunos ejemplos. La Fig. 9-3(a) muestra la tierra en su movimiento alrededor del sol. El centro de masa de la tierra se mueve en la forma



**Fig. 9-3.** El centro de masa de un sistema de partículas sigue una trayectoria debida a la fuerza exterior total actuante sobre el sistema.

en que lo haría una partícula que tuviera una masa igual a la de la tierra y estuviese sujeta a una fuerza igual a la de las fuerzas ejercidas por el sol (y otros cuerpos celestes) sobre todas las partículas que componen la tierra. La Fig. 9-3(b) representa una molécula de agua. Suponiendo, por ejemplo, que la molécula está sujeta a fuerzas externas eléctricas, su centro de masa se mueve como si fuera una partícula de masa igual a la de la molécula sujeta a una fuerza igual a la suma de las fuerzas actuantes sobre todas las partículas cargadas que componen la molécula. La Fig. 9-3(c) ilustra el movimiento de una cadena lanzada al aire. El centro de masa de la cadena se mueve como si fuera una partícula de masa igual a la de la cadena y sujeta a una fuerza igual al peso de la cadena, describiendo, por tanto, una trayectoria parabólica. Finalmente, en la fig. 9-3 (d), tenemos el caso de una granada explotando en el aire; el centro de masa de los fragmentos continuará moviéndose a lo largo de la parábola original, ya que el centro de masa se comporta como si fuera una partícula de masa idéntica a la de la granada sujeta al peso total de todos los fragmentos. El peso de los fragmentos no cambia con la explosión puesto que la fuerza de gravedad es prácticamente independiente de la posición en las cercanías de la superficie terrestre. Debemos notar, sin embargo, que si el campo de fuerza no fuera constante sino dependiera de la posición, los fragmentos resultantes de la explosión estarían sujetos a fuerzas diferentes de aquéllas a lo largo de la trayectoria original. La trayectoria del centro de masa no continuaría entonces como antes de la explosión ya que la suma de las fuerzas exteriores sería diferente. Por ejemplo, si (debido a algún cataclismo cósmico),

un planeta del sistema solar se dividiera en varios fragmentos, el centro de masa de los fragmentos no seguiría la trayectoria elíptica original del planeta puesto que las fuerzas sobre los fragmentos serían diferentes.

**EJEMPLO 9.1.** Una granada que cae verticalmente explota en dos fragmentos iguales cuando se halla a una altura de 2.000 m y tiene una velocidad dirigida hacia abajo de  $60 \text{ m s}^{-1}$ . Inmediatamente después de la explosión uno de los fragmentos se mueve hacia abajo a  $80 \text{ m s}^{-1}$ . Hallar la posición del centro de masa del sistema 10 s después de la explosión.

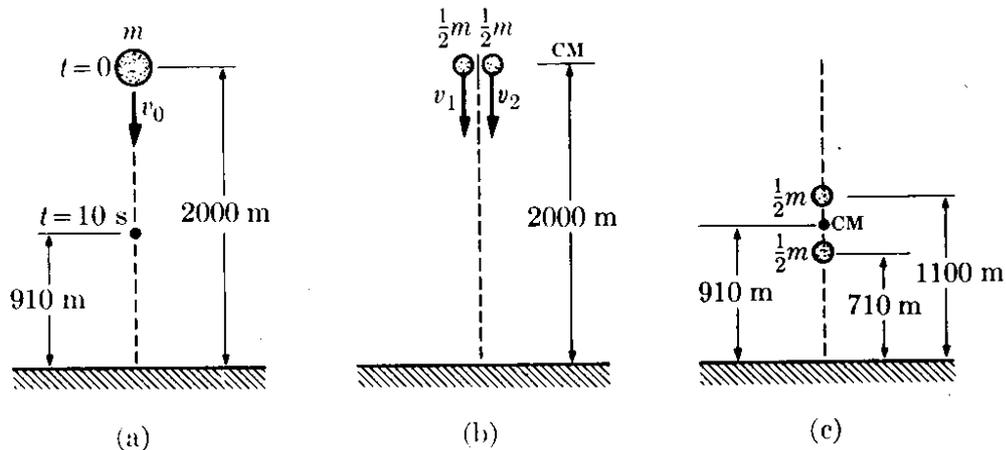


Figura 9-4

**Solución:** Podemos seguir dos métodos (ver la Fig. 9-4). Ya que sabemos que como resultado de la explosión las fuerzas exteriores no han cambiado, podemos suponer que el centro de masa continúa moviéndose como si no hubiese habido ninguna explosión. Por tanto, después de la explosión, el centro de masa estará a una altura dada por  $z = z_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ , donde  $z_0 = 2000 \text{ m}$ ,  $v_0 = -60 \text{ m s}^{-1}$ , y  $g = -9,8 \text{ m s}^{-2}$ . Por consiguiente para  $t = 10 \text{ s}$ ,  $z = 910 \text{ m}$ .

Alternativamente, podemos computar directamente la posición del centro de masa a partir de las posiciones de los fragmentos 10 s después de la explosión. Ya que se conserva el momentum de esta explosión, tenemos que  $m v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$ . Pero también  $m_1 = m_2 = \frac{1}{2} m$ ; luego  $2v_0 = v_1 + v_2$ . Por otra parte  $v_0 = -60 \text{ m s}^{-1}$  y  $v_1 = -80 \text{ m s}^{-1}$ . Por tanto  $v_2 = -40 \text{ m s}^{-1}$  y el segundo fragmento se mueve inicialmente hacia abajo. Después de 10 s la posición del primer fragmento es  $z_1 = z_0 + v_1 t + \frac{1}{2} g t^2 = 710 \text{ m}$  y el segundo fragmento tiene la posición  $z_2 = z_0 + v_2 t + \frac{1}{2} g t^2 = 1110 \text{ m}$ . Aplicando la ec. (9.2), encontramos que la posición del centro de masa es

$$z_{\text{CM}} = \frac{(\frac{1}{2}m)z_1 + (\frac{1}{2}m)z_2}{m} = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = 910 \text{ m},$$

de acuerdo con el resultado anterior.

**EJEMPLO 9.2.** Un chorro de gas sale por una manguera de sección  $a$  con una velocidad  $v$  mucho mayor que la agitación térmica de las moléculas. Choca con una pared que desvía las moléculas sin cambiar la magnitud de su velocidad. Hallar la fuerza ejercida sobre la pared.

**Solución:** Al moverse las moléculas hacia la pared (Fig. 9-5), su velocidad está dirigida hacia abajo. Después de chocar con la pared empieza a moverse hacia arriba. En ambos casos hacen un ángulo  $\theta$  con la normal  $N$ . Cada molécula, como resul-

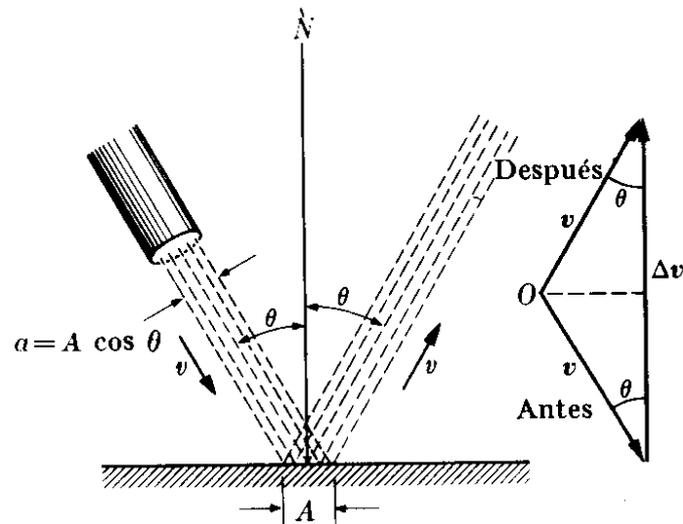


Fig. 9-5. Cambio de momentum de un chorro de gas chocando con una pared.

tado de su impacto con la pared, sufre un cambio  $\Delta v$  en su velocidad, el que es paralelo a la normal  $N$  ya que ésta tiene la dirección de la fuerza ejercida por la pared. La magnitud del cambio es  $|\Delta v| = 2v \cos \theta$ . El cambio en el momentum de una molécula es  $|\Delta p| = m|\Delta v| = 2mv \cos \theta$  en la dirección de la normal  $N$ . Sea  $n$  el número de moléculas por unidad de volumen. Las moléculas que llegan a la pared por unidad de tiempo están contenidas en un volumen cuya longitud es igual a la velocidad  $v$  y cuya sección es  $a$ . Por tanto su número es  $n(av)$ . Cada molécula sufre un cambio de momentum igual a  $2mv \cos \theta$ . Por consiguiente, el cambio de momentum del chorro por unidad de tiempo es

$$F = (nav) (2mv \cos \theta) = 2anmv^2 \cos \theta.$$

Sea  $A$  el área de la pared que sufre el impacto del gas. En la figura vemos que  $a = A \cos \theta$ , y, por tanto, nuestro resultado previo se transforma en

$$F = 2Anmv^2 \cos^2 \theta.$$

Esta, de acuerdo con la ec. (9.8), es la fuerza ejercida por la pared sobre el chorro de gas, y en vista de la ec. (9.10), el chorro gaseoso ejerce una fuerza igual y opuesta sobre el área  $A$  de la pared. [La fuerza del viento sobre las velas de un bote está dada por esta ecuación. Ella da también la fuerza ejercida por el viento soplando contra una pared durante una tempestad. En el ejemplo 9.16 veremos otra aplicación.]

Ya que la fuerza total no está aplicada a una sola partícula de la pared, sino más bien está aplicada sobre un área, podemos introducir un concepto muy útil, ya conocido del estudiante, que es la presión, definida como la fuerza del gas sobre la unidad de área de la pared, Así

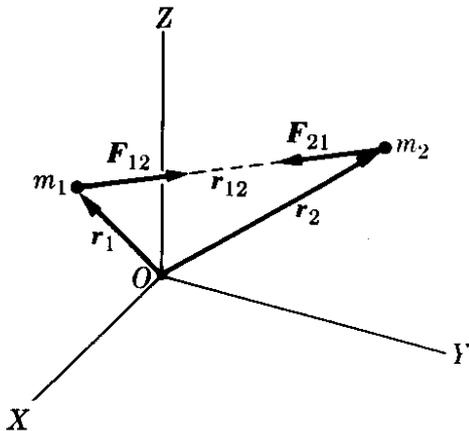
$$p = \frac{F}{A}. \quad (9.13)$$

En el caso particular de este ejemplo, el gas ejerce una presión sobre la pared igual a  $2nmv^2 \cos^2 \theta$ .

### 9.3 Masa reducida

Consideremos ahora el caso de dos partículas sujetas solamente a su interacción mutua; este es el caso en que no actúa ninguna fuerza externa sobre ellas (Fig. 9-6).

Las dos partículas pueden ser, por ejemplo, un electrón y un protón en un átomo aislado de hidrógeno. Las fuerzas internas mutuas  $F_{12}$  y  $F_{21}$  satisfacen la relación (9.10). Hemos dibujado dichas fuerzas a lo largo de la línea  $r_{12}$ . Discutamos ahora el movimiento relativo de las dos partículas. La ecuación del movimiento para cada partícula relativa a un observador inercial  $O$  es  $m_1(d\mathbf{v}_1/dt) = \mathbf{F}_{12}$  y  $m_2(d\mathbf{v}_2/dt) = \mathbf{F}_{21}$  o sea



$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_1}, \quad \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_2}.$$

Sustrayendo estas ecuaciones, obtenemos

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} - \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_2}.$$

Usando la ec. (9.10), en la cual  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ , escribimos el resultado precedente en la forma

Figura 9-6

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{F}_{12}. \quad (9.14)$$

Pero  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{12}$  es la velocidad de  $m_1$  relativa a  $m_2$ , y por tanto

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \frac{d\mathbf{v}_{12}}{dt} = \mathbf{a}_{12}$$

es la aceleración de  $m_1$  relativa a  $m_2$ . Introduzcamos una cantidad llamada la *masa reducida* del sistema de dos partículas, y designada por  $\mu$ , definiéndola como

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \quad \text{ó} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (9.15)$$

La ec. (9.14) puede entonces ser escrita bajo la forma

$$\mathbf{a}_{12} = \frac{\mathbf{F}_{12}}{\mu} \quad \text{ó} \quad \mathbf{F}_{12} = \mu \mathbf{a}_{12}. \quad (9.16)$$

Este resultado importante expresa el hecho de que

*el movimiento relativo de dos partículas sujetas únicamente a una interacción mutua es equivalente al movimiento, relativo a un observador inercial, de una partícula de masa igual a la masa reducida bajo una fuerza igual a la interacción.*

Por ejemplo, podemos reducir el movimiento de la luna relativo a la tierra a un problema de una única partícula usando la masa reducida del sistema luna-tierra y una fuerza igual a la atracción de la tierra sobre la luna. Análogamente, cuando hablamos del movimiento de un electrón alrededor del núcleo, podemos

suponer el sistema reducido a una partícula con masa igual a la masa reducida del sistema electrón-núcleo moviéndose bajo la fuerza entre el electrón y el núcleo. Por consiguiente, al describir el movimiento de dos partículas bajo su interacción mutua podemos separar el movimiento del sistema en el movimiento del centro de masa, cuya velocidad es constante, y el movimiento de las dos partículas, dado por la ec. (9.16), referido a un sistema de referencia ligado al centro de masa.

Nótese que si una de las partículas, por ejemplo  $m_1$ , tiene una masa mucho menor que la otra, la masa reducida se puede escribir,

$$\mu = \frac{m_1}{1 + m_1/m_2} \cong m_1 \left( 1 - \frac{m_1}{m_2} \right). \quad (9.17)$$

donde hemos dividido ambos términos en la ec. (9.15) por  $m_2$  y usado la aproximación  $(1 + x)^{-1} \cong 1 - x$ , de acuerdo a la ec. (M.28). Esto conduce a una masa reducida aproximadamente igual a la masa de la partícula más ligera. Por ejemplo, al discutir el movimiento de un satélite artificial alrededor de la tierra podemos usar, con muy buena aproximación, la masa del satélite y no la masa reducida del sistema tierra-satélite. Por otra parte, si las dos partículas tienen la misma masa ( $m_1 = m_2$ ), tenemos  $\mu = \frac{1}{2}m_1$ . Este es el caso de dos protones interactuando entre sí. Lo mismo vale, con muy buena aproximación, para un sistema formado por un neutrón y un protón, tal como ocurre en el deuterón.

**EJEMPLO 9.3.** Calcular la masa reducida de los siguientes sistemas : (a) electrón-protón en un átomo de hidrógeno, (b) protón-neutrón en un núcleo de deuterio. En cada caso comparar el resultado con la masa de la partícula más liviana.

**Solución:** (a) Para el sistema electrón-protón que comprende un átomo de hidrógeno, tenemos que  $m_e = 9,1091 \times 10^{-31}$  kg y  $m_p = 1,6725 \times 10^{-27}$  kg. Por consiguiente, dado que  $m_e$  es mucho más pequeña que  $m_p$ , podemos escribir, usando la ecuación (9.17),

$$\mu_{ep} = m_e \left( 1 - \frac{m_e}{m_p} \right) = 9,1031 \times 10^{-31} \text{ kg.}$$

Vemos que  $\mu$  difiere de  $m_e$  en alrededor de 0,06 %. A pesar de su pequeñez, esta diferencia produce resultados percibidos en muchos procesos atómicos.

(b) Para el sistema neutrón-protón en el deuterón, tenemos que  $m_n = 1,6748 \times 10^{-27}$  kg, que es casi lo mismo que  $m_p$ . Podemos entonces usar la fórmula exacta, ec. (9.15), la que da

$$\mu_{np} = \frac{m_p m_n}{m_p + m_n} = 0,8368 \times 10^{-27} \text{ kg,}$$

resultado que es aproximadamente igual a la mitad de la masa de cualquiera de las partículas.

**EJEMPLO 9.4.** Un observador mide la velocidad de dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  y obtiene, respectivamente, los valores  $v_1$  y  $v_2$ . Determinar la velocidad del centro de masa relativa al observador y la velocidad de cada partícula relativa al centro de masa.

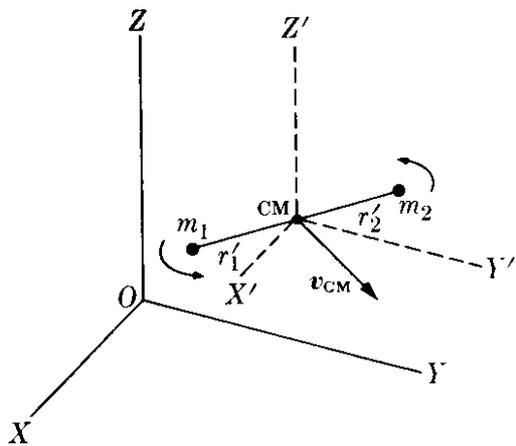


Fig. 9-7. Movimiento relativo al CM.

**Solución:** De la ec. (9.1) tenemos (Fig. 9-7)

$$v_{CM} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

La velocidad de cada partícula relativa al centro de masa, usando la transformación Galileana de velocidades dada por la ec. (6.9), es

$$v'_1 = v_1 - v_{CM} = v_1 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} =$$

$$\frac{m_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 v_{12}}{m_1 + m_2};$$

$$v'_2 = v_2 - v_{CM} = \frac{m_1(v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} = -\frac{m_1 v_{12}}{m_1 + m_2},$$

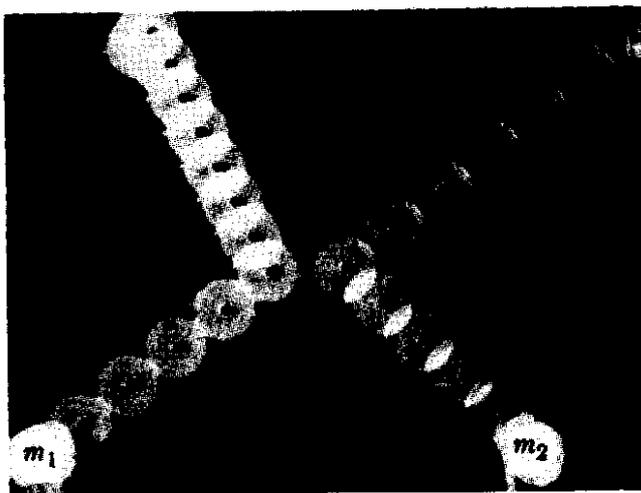
donde  $v_{12} = v_1 - v_2$  es la velocidad relativa de las dos partículas. Por tanto en el sistema C, las dos partículas parecen moverse en direcciones opuestas. El momentum de la partícula 1 relativo al centro de masa es

$$p'_1 = m_1 v'_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{12} = \mu v_{12}.$$

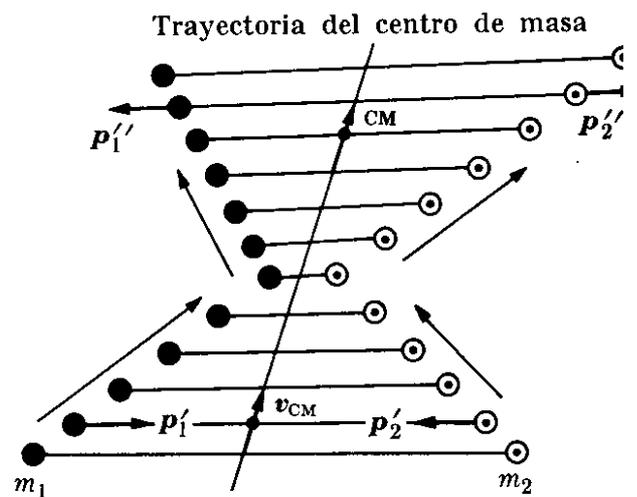
Por consiguiente el momentum de la partícula 1 en el sistema C es igual a la masa reducida del sistema multiplicada por la velocidad relativa. Análogamente, para la partícula 2,

$$p'_2 = m_2 v'_2 = \mu v_{21} = -\mu v_{12}.$$

Así verificamos que en el sistema de referencia del centro de masa las dos partículas se mueven con momenta iguales y opuestas, y que el momentum total es  $P'_1 + P'_2 = 0$ , de acuerdo a la ec. (9.4). Ello se ilustra en la fotografía de la Fig. 9-8(a) cuyo análisis aparece en la Fig. 9-8(b).



(a)



(b)

Fig. 9-8. Colisión entre dos cuerpos ( $m_1 = 2 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 1,5 \text{ kg}$ ). La interacción aparece solamente cuando los cuerpos se hallan muy próximos entre sí. (a) Fotografía de exposición múltiple del movimiento de los dos cuerpos. (b) Análisis gráfico de la fotografía, mostrando que el CM se ha movido en línea recta con velocidad constante relativa al laboratorio.

Las relaciones que hemos derivado en este ejemplo son muy importantes en los experimentos de dispersión de física nuclear. En dichos experimentos las velocidades de las partículas son medidas con relación a un sistema de referencia  $L$  fijo en el laboratorio. Pero las expresiones teóricas para la dispersión son más simples cuando se las refiere al sistema de referencia del centro de masa. De ese modo las relaciones entre ambos conjuntos de medidas deben ser conocidas, y para determinarlas, debemos usar las fórmulas derivadas anteriormente.

### 9.4 Momentum angular de un sistema de partículas

Discutamos ahora el momentum angular de un sistema de partículas. En la ec. (7.32) definimos el momentum angular de una partícula con relación a un punto dado como la cantidad vectorial

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}), \quad (9.18)$$

y obtuvimos en la ec. (7.38) una relación entre  $\mathbf{L}$  y el torque  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  de la fuerza aplicada. Esto es

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}. \quad (9.19)$$

Examinemos una situación similar, en la cual sin embargo intervienen varias partículas y no solamente una. Por simplicidad consideremos primero solamente el caso de dos partículas. La ec. (9.19) aplicada a las partículas 1 y 2 da

$$\frac{d\mathbf{L}_1}{dt} = \boldsymbol{\tau}_1 \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{L}_2}{dt} = \boldsymbol{\tau}_2.$$

Sumando las dos ecuaciones, obtenemos

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2) = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2. \quad (9.20)$$

Supongamos que cada partícula, además de su interacción con la otra está sometida a una fuerza externa (Fig. 9-9). Entonces la fuerza sobre la partícula 1 es  $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12}$  y sobre la partícula 2 es  $\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21}$ , y

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_1 &= \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12}) = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12}, \\ \boldsymbol{\tau}_2 &= \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21}) = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21}. \end{aligned}$$

Dado que  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ , el torque total sobre las partículas es

$$\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{F}_{21}.$$

El vector  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{21}$  tiene la dirección de la línea que une las dos partículas. Si es que suponemos especialmente que las fuerzas internas  $\mathbf{F}_{12}$  y  $\mathbf{F}_{21}$  actúan a lo largo de la línea  $\mathbf{r}_{21}$  que une las dos partículas, los vectores  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{21}$  y  $\mathbf{F}_{21}$

son paralelos, y por tanto  $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{F}_{21} = 0$ . El último término de la ecuación anterior desaparece entonces, dejando solamente los torques debidos a las *fuerzas externas*. Esto es, la ec. (9.20) se transforma en

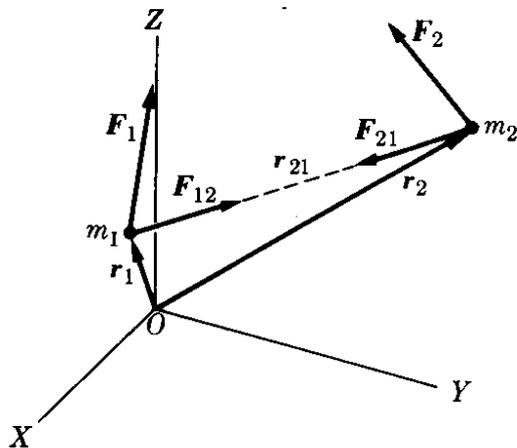


Figura 9-9

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2) = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \boldsymbol{\tau}_{1, \text{ext}} + \boldsymbol{\tau}_{2, \text{ext}}$$

Generalizando este resultado a cualquier número de partículas, obtenemos

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} \quad (9.21)$$

En esta ecuación  $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i$  es el momentum angular total de las partículas, y  $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$  es el torque total ejercido por las fuerzas *externas* solamente, siempre y cuando las fuerzas internas actúen a lo largo de las líneas que unen cada par de partículas. Expresando la ec. (9.21) en palabras, podemos decir que

*la rapidez de cambio del momentum angular total de un sistema de partículas, relativo a un punto arbitrario, es igual al torque total relativo al mismo punto, de las fuerzas externas actuantes sobre el sistema.*

Este enunciado puede ser considerado como la ley fundamental de la dinámica de rotación. En el capítulo 10 lo aplicaremos al movimiento de un cuerpo rígido.

Si no hay fuerzas externas, o si la suma de sus torques es cero,  $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = 0$ ; por consiguiente

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\sum_i \mathbf{L}_i) = 0.$$

Integrando, obtenemos

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3 + \dots = \text{const.} \quad (9.22)$$

La ec. (9.22) constituye la *ley de conservación del momentum angular*. Expresado en palabras, indica que

*el momentum angular total de un sistema aislado, o un sistema sobre el que actúa un torque externo total nulo, es constante en magnitud y dirección.*

Este es el caso, por ejemplo, de los electrones de un átomo cuando uno considera únicamente las fuerzas internas debidas a la repulsión electrostática de los electrones y a la atracción electrostática del núcleo, que son fuerzas internas actuantes a lo largo de las líneas que unen cada par de partículas. También, suponemos que el sistema solar está aislado y despreciamos las fuerzas debidas al resto de la galaxia, el momentum angular total de todos los planetas relativo a

centro de masa del sistema solar permanece constante. Esta conclusión es válida con un alto grado de precisión. Análogamente, la razón por la que la tierra se mantiene rotando alrededor de su centro de masa con un momentum angular que es esencialmente constante, es que las fuerzas externas debidas al sol y a los otros planetas pasan por el centro de la tierra y por consiguiente tienen un torque nulo (o aproximadamente nulo) alrededor del centro de masa.

A pesar de la suposición especial que utilizamos para derivar la ley de conservación del momentum angular (esto es, que las fuerzas internas actúen a lo largo de las líneas que unen cada par de partículas), esta ley parece ser universalmente válida, aplicándose a todos los procesos observados hasta el momento, aunque nuestra suposición especial no parezca ser válida. La ley de conservación del momentum angular implica que si, en un sistema aislado, el momentum angular de una parte del sistema cambia debido a interacciones intensas, el resto del sistema experimenta un cambio opuesto de momentum angular, de tal manera que el momentum angular total se ha conservado.

Por ejemplo, en un núcleo en desintegración las partículas emitidas, en muchos casos un electrón y un neutrino, poseen cierto momentum angular. Dado que en el proceso de desintegración solamente actúan fuerzas internas, el momentum angular del núcleo debe cambiar exactamente para compensar el momentum angular de las partículas emitidas. Análogamente, si un átomo, molécula, o núcleo emite radiación electromagnética, su momentum angular debe cambiar de modo de compensar exactamente el momentum angular de la radiación. Algunas veces ciertos procesos que podrían ocurrir en la naturaleza no ocurren debido a que algún aspecto característico de ellos entraña una violación de la conservación del momentum angular.

**EJEMPLO 9.5.** Momentum angular de dos partículas relativo a su centro de masa o sistema de referencia  $C$ .

**Solución:** Sea  $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  el vector posición de la partícula 1 relativo a la partícula 2. La posición del centro de masa de las dos partículas (referirse a la Fig. 9-6) relativo al sistema de referencia  $L$  es

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

Por tanto el vector posición de cada partícula relativo al centro de masa o sistema de referencia  $C$  es

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_1 &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{\text{CM}} = \frac{m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \mathbf{r}_{12}}{m_1 + m_2}, \\ \mathbf{r}'_2 &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{\text{CM}} = \frac{m_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{m_1 + m_2} = -\frac{m_1 \mathbf{r}_{12}}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Usando los resultados del ejemplo 9,4, obtenemos el momentum angular relativo al centro de masa,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\text{CM}} &= \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{p}'_1 + \mathbf{r}'_2 \times \mathbf{p}'_2 \\ &= \left( \frac{m_2 \mathbf{r}_{12}}{m_1 + m_2} \right) \times (\mu \mathbf{v}_{12}) + \left( -\frac{m_1 \mathbf{r}_{12}}{m_1 + m_2} \right) \times (-\mu \mathbf{v}_{12}) \\ &= \mu \mathbf{r}_{12} \times \mathbf{v}_{12} = \mathbf{r}_{12} \times (\mu \mathbf{v}_{12}). \end{aligned}$$

Luego, el momentum angular del sistema relativo al centro de masa es el mismo que el de una sola partícula de momentum  $\mu v_{12}$  y vector posición  $r_{12}$ . Nótese que en la expresión final para  $L_{CM}$ , las únicas cantidades que aparecen son aquellas que describen la posición *relativa* y el movimiento *relativo* de las dos partículas.

Este resultado, por ejemplo, es importante al computar el momentum angular de un átomo de hidrógeno. Debemos usar la distancia y la velocidad del electrón relativas al protón, pero debemos reemplazar la masa del electrón por la masa reducida del sistema electrón-protón, esto es,  $L_{CM} = \mu_{ep} r_{ep} \times v_{ep}$ , donde los subíndices e y p se refieren al electrón y al protón, respectivamente.

Tratándose de un sistema de muchas partículas, es costumbre referir el momentum angular total al centro de masa, y entonces llamarlo momentum angular *interno* del sistema. El momentum angular interno es así una propiedad del sistema, y es independiente del observador. En el caso de un cuerpo rígido o de una partícula elemental, el momentum angular interno se llama también *spin*.

**EJEMPLO 9.6.** Relación entre el momentum angular de un sistema de partículas relativo al centro de masa o sistema C (momentum angular interno) y el momentum angular relativo al laboratorio o sistema-L.

**Solución:** Por simplicidad consideremos un sistema compuesto de dos partículas. El momentum angular relativo al laboratorio o sistema-L es

$$L = r_1 \times p_1 + r_2 \times p_2.$$

Si  $v_1$  y  $v_2$  son las velocidades relativas al sistema L y  $v'_1$  y  $v'_2$  las velocidades relativas al sistema-C, tenemos que  $v_1 = v'_1 + v_{CM}$  y  $v_2 = v'_2 + v_{CM}$ . Entonces  $p_1 = m_1 v_1 = m_1(v'_1 + v_{CM}) = p'_1 + m_1 v_{CM}$ , y análogamente  $p_2 = p'_2 + m_2 v_{CM}$ . Por tanto, recordando que  $r_1 = r'_1 + r_{CM}$  y  $r_2 = r'_2 + r_{CM}$ , obtenemos

$$\begin{aligned} L &= (r'_1 + v_{CM}) \times (p'_1 + m_1 v_{CM}) + (r'_2 + r_{CM}) \times (p'_2 + m_2 v_{CM}) \\ &= r'_1 \times p'_1 + r'_2 \times p'_2 + r_{CM} \times (p'_1 + p'_2) + (m_1 r_1 + m_2 r_2) \times v_{CM}. \end{aligned}$$

Recordamos el ejemplo 9,4 o la ec. (9.4) en que  $p'_1 + p'_2 = 0$  y las definiciones de  $L_{CM}$  (ejemplo 9.5) y  $r_{CM}$  (ec. 9.2), concluyendo que el momentum angular relativo al sistema-L del laboratorio es

$$L = L_{CM} + (m_1 + m_2) r_{CM} \times v_{CM} = L_{CM} + M r_{CM} \times v_{CM}. \quad (9.23)$$

El primer término de la derecha da el momentum angular interno relativo al sistema-C, y el último término, el momentum angular *externo* relativo al sistema-L, como si toda la masa del sistema estuviera concentrada en el centro de masa. Por ejemplo, cuando un lanzador arroja una pelota rotando, el momentum angular debido a la rotación está dado por  $L_{CM}$ , mientras que el momentum angular debido a la traslación de la pelota está dado por  $m_{bola} r_{CM} \times v_{CM}$ . Una situación análoga ocurre para el electrón en rotación dando vueltas alrededor de un protón en un átomo de hidrógeno. Esto indica otra vez que podemos separar el movimiento interno del movimiento del centro de masa en lo que se refiere al momentum angular. Aunque nuestra demostración vale sólo para dos partículas, este resultado es válido para un sistema compuesto de cualquier número de partículas.

**EJEMPLO 9.7.** Relación entre el torque externo alrededor del centro de masa y el momentum angular interno de un sistema de partículas.

**Solución:** Considerando de nuevo, por simplicidad algebraica, un sistema compuesto de dos partículas  $m_1$  y  $m_2$  sujetas a fuerzas externas  $F_1$  y  $F_2$ , tenemos que el torque total externo relativo al origen de coordenadas en el sistema L es

$$\begin{aligned} \tau_{ext} &= r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 = (r'_1 + r_{CM}) \times F_1 + (r'_2 + r_{CM}) \times F_2 \\ &= r'_1 \times F_1 + r'_2 \times F_2 + r_{CM} \times (F_1 + F_2). \end{aligned}$$

Los dos primeros términos dan el torque externo relativo al centro de masa, que será designado por  $\tau_{\text{CM}}$ , mientras que el último término da el torque de la fuerza externa resultante  $F_{\text{ext}} = F_1 + F_2$  como si estuviera aplicada en el centro de masa. Por tanto

$$\tau_{\text{ext}} = \tau_{\text{CM}} + r_{\text{CM}} \times F_{\text{ext}}. \quad (9.24)$$

Pero, del resultado del ejemplo 9.6, se obtiene  $L = L_{\text{CM}} + M r_{\text{CM}} \times v_{\text{CM}}$ . Tomando la derivada temporal de esta expresión, obtenemos

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL_{\text{CM}}}{dt} + M r_{\text{CM}} \times \frac{dr_{\text{CM}}}{dt} + M \frac{dr_{\text{CM}}}{dt} \times v_{\text{CM}}.$$

Recordamos que  $dr_{\text{CM}}/dt = v_{\text{CM}}$ , de manera que el último término es cero y, usando la ecuación (9.9) (esto es,  $F_{\text{ext}} = M dv_{\text{CM}}/dt$ ), obtenemos

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL_{\text{CM}}}{dt} + r_{\text{CM}} \times F_{\text{ext}}.$$

Sustituyendo en la ec. (9.21) las expresiones para  $dL/dt$  y  $\tau_{\text{ext}}$ , que acabamos de obtener, reconocemos que

$$\frac{dL_{\text{CM}}}{dt} = \tau_{\text{CM}}. \quad (9.25)$$

Esta relación es formalmente idéntica a la ec. (9.21), pero existen algunas diferencias básicas. La ec. (9.21) es válida solamente cuando el momentum angular y el torque se evalúan con relación a un punto fijo en un sistema inercial de referencia, usualmente el origen de coordenadas. Por otra parte, la ec. (9.25) es válida para el centro de masa, aún si no está en reposo con relación a un sistema inercial de referencia. Aunque esta ecuación ha sido probada para dos partículas, es también válida para un sistema compuesto de cualquier número de partículas. Es especialmente útil para discutir el movimiento de un cuerpo rígido.

### 9.5 Energía cinética de un sistema de partículas

Consideremos un sistema compuesto de dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$ , sujetas a las fuerzas externas  $F_1$  y  $F_2$  y a las fuerzas internas  $F_{12}$  y  $F_{21}$ . En un cierto instante las partículas ocupan las posiciones indicadas en la Fig. 9-10, moviéndose con velocidades  $v_1$  y  $v_2$  a lo largo de las trayectorias  $C_1$  y  $C_2$ . La ecuación del movimiento de cada partícula es

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= F_1 + F_{12}, \\ m_2 a_2 &= F_2 + F_{21}. \end{aligned} \quad (9.26)$$

En un pequeño intervalo  $dt$ , las partículas experimentan desplazamientos  $dr_1$

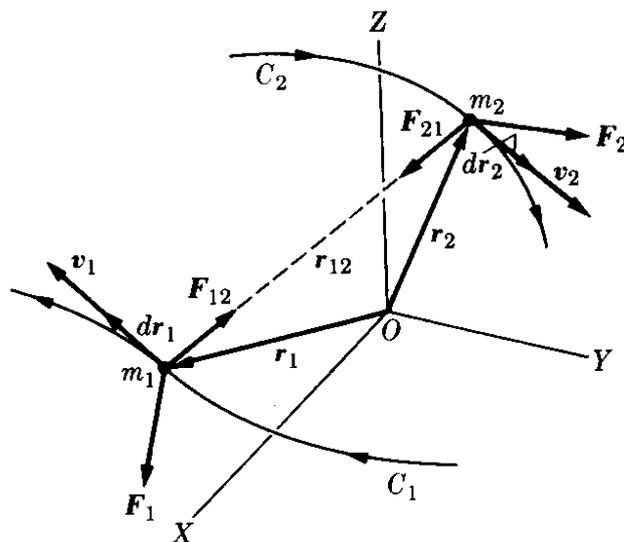


Figura 9-10

y  $d\mathbf{r}_2$  tangentes a sus trayectorias. Al tomar el producto escalar de las ecs. (9.26), la primera con  $d\mathbf{r}_1$  y la segunda con  $d\mathbf{r}_2$ , obtenemos

$$m_1 \mathbf{a}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_1,$$

y

$$m_2 \mathbf{a}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 = \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_{21} \cdot d\mathbf{r}_2.$$

Sumando dichas ecuaciones y recordando que  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ , obtenemos

$$m_1 \mathbf{a}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_{12} \cdot (d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}_2). \quad (9.27)$$

Ahora, dado que  $d\mathbf{r}_1/dt = \mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{v}_1 = v_1 dv_1$ , obtenemos que  $\mathbf{a}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 = (dv_1/dt) \cdot d\mathbf{r}_1 = dv_1 \cdot (d\mathbf{r}_1/dt) = v_1 dv_1$ . Análogamente,  $\mathbf{a}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 = v_2 dv_2$ . También  $d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}_2 = d(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = d\mathbf{r}_{12}$ . Por consiguiente la ec. (9.27) se transforma en

$$m_1 v_1 dv_1 + m_2 v_2 dv_2 = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12}.$$

Integrando a partir de un tiempo inicial  $t_0$  hasta un tiempo arbitrario  $t$ , obtenemos

$$\begin{aligned} m_1 \int_{v_{10}}^{v_1} v_1 dv_1 + m_2 \int_{v_{20}}^{v_2} v_2 dv_2 &= \int_A^B (\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2) + \\ &+ \int_A^B \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12}, \end{aligned} \quad (9.28)$$

donde  $A$  y  $B$  son símbolos usados para designar la posición de *ambas* partículas en los tiempos  $t_0$  y  $t$ . Puesto que  $\int_{v_0}^v v dv = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$  obtenemos, para el miembro izquierdo de la ec. (9.28),

$$\begin{aligned} (\frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}m_1 v_{10}^2) + (\frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}m_2 v_{20}^2) \\ = (\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2) - (\frac{1}{2}m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{20}^2) \\ = E_k - E_{k,0}, \end{aligned}$$

donde

$$E_k = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \quad (9.29)$$

es la energía cinética *total* del sistema de dos partículas en el instante  $t$ , y  $E_{k,0}$  la energía cinética total en el instante  $t_0$  relativa al sistema de referencia del observador. El primer término en el miembro derecho de la ec. (9.28) da el trabajo *total*  $W_{\text{ext}}$  hecho por las fuerzas *exteriores* durante el mismo intervalo de tiempo. Vale decir,

$$W_{\text{ext}} = \int_A^B (\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2).$$

Finalmente el último término de la ec. (9.28) da el trabajo  $W_{\text{int}}$  hecho por las fuerzas *interiores*. Esto es,

$$W_{\text{int}} = \int_A^B \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12}.$$

Sustituyendo estas notaciones en la ec. (9.28) obtenemos

$$E_k - E_{k,0} = W_{\text{ext}} + W_{\text{int}}, \quad (9.30)$$

lo que se puede expresar diciendo que

*el cambio de energía cinética de un sistema de partículas es igual al trabajo efectuado sobre el sistema por las fuerzas exteriores e interiores.*

Esta es la extensión natural de nuestro resultado previo para una partícula dado en la ecuación (8.13), y es válido para un sistema compuesto por cualquier número de partículas.

### 9.6 Conservación de la energía de un sistema de partículas

Supongamos ahora que las fuerzas internas son conservativas, y que por tanto existe una función  $E_{p,12}$  dependiente de las coordenadas de  $m_1$  y  $m_2$  tal que

$$W_{\text{int}} = \int_A^B \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12} = E_{p,12,0} - E_{p,12} \quad (9.31)$$

donde  $E_{p,12}$  se refiere al instante  $t$  y  $E_{p,12,0}$  al instante  $t_0$ . Llamaremos a  $E_{p,12}$  la *energía potencial interna* del sistema. Si las fuerzas interiores actúan a lo largo de la línea  $\mathbf{r}_{12}$  que unen las dos partículas, entonces la energía potencial interna depende solamente de la distancia  $r_{12}$ , por la misma razón que la energía potencial debida a una fuerza central depende solamente de la distancia  $r$  (sección 8.10). En este caso la energía potencial interna es independiente del sistema de referencia ya que contiene sólo la distancia entre las dos partículas, situación que representa razonablemente bien la mayoría de las interacciones que se encuentran en la naturaleza. Sustituyendo la ec. (9.31) en la ec. (9.30), obtenemos  $E_k - E_{k,0} = W_{\text{ext}} + E_{p,12,0} - E_{p,12}$ , o sea

$$(E_k + E_{p,12}) - (E_k + E_{p,12})_0 = W_{\text{ext}}. \quad (9.32)$$

La cantidad

$$U = E_k + E_{p,12} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + E_{p,12} \quad (9.33)$$

será llamada la *energía propia* del sistema. Esta es igual a la suma de las energías cinéticas de las partículas relativas a un observador inercial y su energía potencial interna, la cual, como lo mostramos antes, es (bajo nuestra suposición) independiente del sistema de referencia.

Si en vez de dos partículas tenemos varias, la energía propia es

$$U = E_k + E_{p,\text{int}} = \sum_{\text{Todas las partículas}} \frac{1}{2}m_i v_i^2 + \sum_{\text{Todos los pares}} E_{p,ij}, \quad (9.34)$$

donde

$$E_k = \sum_{\substack{\text{Todas las} \\ \text{partículas}}} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \dots$$

y

$$E_{p,\text{int}} = \sum_{\substack{\text{Todos los} \\ \text{pares}}} E_{p,ij} = E_{p,12} + E_{p,13} + \dots + E_{p,23} + \dots$$

Nótese que la primera suma, correspondiente a la energía cinética, tiene un término para *cada* partícula. Nótese también que la segunda suma, correspondiente a la energía potencial interna, tiene un término para *cada par* de partículas, ya que se refiere solamente a la interacción entre dos partículas. Si no hay fuerzas interiores, toda la energía propia es cinética.

Sustituyendo la definición (9.33) de energía propia en la ec. (9.32), obtenemos

$$U - U_0 = W_{\text{ext}}, \quad (9.35)$$

lo que establece que

*el cambio de la energía propia de un sistema de partículas es igual al trabajo efectuado sobre el sistema por las fuerzas externas.*

Este importante enunciado se llama la *ley de conservación de la energía*. Hasta ahora la ley ha aparecido como una consecuencia del principio de la conservación del momentum y la suposición de que las fuerzas interiores son conservativas. Sin embargo, esta ley parece ser verdadera en todos los procesos que observamos en el universo, y por tanto se le concede validez general, más allá de las suposiciones especiales bajo las cuales la hemos derivado. La ec. (9.8) expresa la interacción del sistema con el mundo exterior por medio de su cambio de momentum. La ec. (9.35) expresa la misma interacción por medio del cambio de energía del sistema.

Consideremos ahora un sistema aislado en el cual  $W_{\text{ext}} = 0$ , ya que no hay fuerzas exteriores. Entonces  $U - U_0 = 0$  o sea  $U = U_0$ . Esto es,

*la energía propia de un sistema aislado de partículas permanece constante,*

bajo la suposición de que las fuerzas internas son conservativas. Si la energía cinética de un sistema aislado aumenta, su energía potencial interna debe disminuir en la misma cantidad de manera que la suma permanezca igual. Por ejemplo, en una molécula de hidrógeno aislada, la suma de la energía cinética relativa a algún sistema de referencia inercial y la energía potencial interna de dos protones y de dos electrones permanece constante.

El principio de conservación del momentum, junto con las leyes de conservación de la energía y del momentum angular, son reglas fundamentales que según parece gobiernan todos los procesos que pueden ocurrir en la naturaleza.

Puede suceder que las fuerzas externas actuantes sobre un sistema sean también conservativas de modo que  $W_{\text{ext}}$  se puede escribir como  $W_{\text{ext}} = E_{p,\text{ext},0} - E_{p,\text{ext}}$ ,

donde  $E_{p,\text{ext},0}$  y  $E_{p,\text{ext}}$  son los valores de la energía potencial asociada con las fuerzas externas en los estados inicial y final. Entonces la ec. (9.35) se transforma en

$$U - U_0 = E_{p,\text{ext},0} - E_{p,\text{ext}}$$

o sea

$$U + E_{p,\text{ext}} = U_0 + E_{p,\text{ext},0}$$

La cantidad

$$E = U + E_{p,\text{ext}} = E_k + E_{p,\text{int}} + E_{p,\text{ext}} \quad (9.36)$$

se llama la *energía total* del sistema. Permanece constante durante el movimiento del sistema bajo fuerzas conservativas internas y externas. Este resultado es similar a la ec. (8.29) para una sola partícula.

Por ejemplo, un átomo de hidrógeno, compuesto de un electrón y de un protón, tiene una energía propia igual a la suma de las energías cinéticas de electrón y protón y la energía potencial interna debida a su interacción eléctrica. Si el átomo está aislado, la suma de dichas energías es constante. Pero si el átomo está en un campo externo su energía total debe incluir, además, la energía potencial debida al campo externo, y esta energía es entonces la que permanece constante.

Como otro ejemplo, consideremos las dos masas  $m_1$  y  $m_2$  unidas a un resorte cuya constante elástica es  $k$ . Si el sistema se lanza al aire, la energía cinética es  $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$ , la energía potencial interna, debida a la extensión o compresión del resorte, es igual a  $\frac{1}{2}kx^2$ , donde  $x$  es la deformación del resorte, y la energía potencial externa (debida a la atracción gravitatoria de la tierra) es  $m_1gy_1 + m_2gy_2$ , donde  $y_1$  e  $y_2$  son las alturas de las partículas sobre la superficie terrestre. La energía propia del sistema es entonces  $U = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}kx^2$  y, si no hay otras fuerzas actuantes sobre el sistema, la energía total es

$$E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}kx^2 + m_1gy_1 + m_2gy_2,$$

y esta energía debe permanecer constante durante el movimiento.

Dado que la energía cinética depende de la velocidad, el valor de la energía cinética depende del sistema de referencia usado para discutir el movimiento del sistema. Llamaremos *energía cinética interna*  $E_{k,\text{CM}}$  a la energía cinética referida al centro de masa. La energía potencial interna que depende únicamente de la distancia entre las partículas, tiene el mismo valor en todos los sistemas de referencia (como se explicó antes) y, por tanto, definiremos la *energía interna* del sistema como la suma de las energías cinética y potencial internas.

$$U_{\text{int}} = E_{k,\text{CM}} + E_{p,\text{int}} \quad (9.37)$$

En el futuro, al tratar de la energía de un sistema de partículas, nos referiremos en general solamente a la energía interna, aun cuando no escribamos el subíndice CM.

La energía potencial interna de algunos sistemas es en circunstancias especiales, despreciable comparada con la energía cinética interna. Ello se cumple,

por ejemplo, en el caso de un gas a alta temperatura. En esta circunstancia la energía interna puede considerarse totalmente cinética, y el principio de conservación de la energía se reduce a la conservación de la energía cinética.

**EJEMPLO 9.8.** Relación entre la energía cinética de un sistema de partículas relativa al laboratorio o sistema- $L$  y la energía cinética interna relativa al centro de masa o sistema- $C$ .

**Solución:** Consideremos por simplicidad dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  con velocidades  $v_1$  y  $v_2$  en el sistema- $L$ , y velocidades  $v'_1$  y  $v'_2$  en el sistema- $C$ . Los dos conjuntos de velocidades están relacionados por  $v_1 = v'_1 + v_{CM}$  y  $v_2 = v'_2 + v_{CM}$ , donde  $v_{CM}$  es la velocidad del centro de masa relativa al sistema- $L$ .

$$E_k = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1(v'_1 + v_{CM})^2 + \frac{1}{2}m_2(v'_2 + v_{CM})^2.$$

Podemos reescribir este enunciado como

$$E_k = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{CM}^2 + (m_1v'_1 + m_2v'_2) \cdot v_{CM}.$$

La cantidad  $m_1v'_1 + m_2v'_2$  es el momentum total del sistema referido al centro de masa, y por la ec. (9.4), debe ser cero. (Ver también ejemplo 9.4). La energía cinética interna  $E_{k,CM}$  referida al sistema- $C$  es  $E_{k,CM} = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$ . Por consiguiente la energía cinética  $E_k$  del sistema, referida al sistema del laboratorio, puede ser escrita como

$$E_k = E_{k,CM} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{CM}^2 = E_{k,CM} + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2. \quad (9.38)$$

El primer término,  $E_{k,CM}$ , es la *energía cinética interna*. El segundo término en la derecha es la energía cinética de una partícula de masa  $M = m_1 + m_2$  moviéndose con el centro de masa. Se le llama la *energía cinética de traslación* del sistema. Aunque la ec. (9.38) ha sido probada para dos partículas, vale también para un sistema compuesto de un número arbitrario de partículas.

Notamos una vez más que podemos separar el movimiento del sistema en dos partes, cada una con una energía cinética bien definida. Una es el movimiento de traslación con la velocidad del centro de masa, y la otra es el movimiento interno relativo al centro de masa.

Consideremos nuevamente el caso de un lanzador tirando una bola en rotación. La energía cinética total de la bola relativa al suelo es la suma de su energía cinética interna relativa al centro de masa, que corresponde a la energía cinética de rotación, y su energía cinética de traslación relativa al suelo, que es  $\frac{1}{2}Mv_{CM}^2$ . Una situación similar es la de una molécula. En general, es en el movimiento interno en el que estamos interesados y por tal razón, se prefiere el uso del sistema- $C$  para describir muchos procesos.

Como hemos dicho antes, la energía potencial interna  $E_{p,12}$  depende solamente de la distancia entre  $m_1$  y  $m_2$ , y es la misma en los sistemas  $C$  y  $L$ . Sumando  $E_{p,12}$  en ambos lados de la ec. (9.38) y usando la ec. (9.33), podemos escribir

$$U = U_{int} + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2,$$

donde  $U_{int} = E_{k,CM} + E_{p,12}$ . Esta ecuación relaciona la energía interna  $U_{int}$  y la energía propia  $U$  medida en los sistemas de referencia  $C$  y  $L$ . Nótese que para un sistema aislado  $v_{CM}$  es constante y por consiguiente, si  $U$  es constante,  $U_{int}$  también lo es. Esto es, cuando la energía es conservada en un sistema inercial  $L$ , también es conservada en el sistema del centro de masa  $C$ , y recíprocamente.

**EJEMPLO 9.9.** Expresar la energía cinética interna de dos partículas en términos de su masa reducida y su velocidad relativa.

**Solución:** La energía cinética interna es  $E_{k,CM} = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$ . Usando los resultados del ejemplo 9.4, esto es,

$$v_1' = \frac{m_2v_{12}}{m_1 + m_2}, \quad v_2' = -\frac{m_1v_{12}}{m_1 + m_2},$$

obtenemos

$$E_{k,CM} = \frac{1}{2}m_1 \left( \frac{m_2v_{12}}{m_1 + m_2} \right)^2 + \frac{1}{2}m_2 \left( \frac{m_1v_{12}}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{1}{2}\mu v_{12}^2.$$

Encontramos así, como lo hicimos antes para el momentum angular en el ejemplo 9.5, que la energía cinética interna de un sistema de dos partículas es equivalente a la de una partícula de masa igual a la masa reducida moviéndose con la velocidad relativa  $v_{12}$ . Por ejemplo, la energía interna de un átomo de hidrógeno es  $U_{int} = \frac{1}{2}\mu_{ep}v_{ep}^2 + E_p(r_{ep})$ , donde los subíndices se refieren al electrón y al protón. Los resultados que hemos derivado en éste y los ejemplos anteriores son de gran importancia por sus numerosas aplicaciones, especialmente en la física atómica y nuclear.

La tabla 9-1 muestra las relaciones más importantes que hemos derivado hasta el momento en este capítulo, relaciones usadas en muchas aplicaciones.

**TABLA 9-1**

Relación	Número de la ecuación
Relaciones cinemáticas	
$P = Mv_{CM}$ ( $P_{CM} = 0$ )	(9,3)
$L = L_{CM} + Mr_{CM} \times v_{CM}$	(9,23)
$\tau_{ext} = \tau_{CM} + r_{CM} \times F_{ext}$	(9,24)
$E_k = E_{k,CM} + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2$	(9,38)
Relaciones dinámicas	
$dP/dt = F_{ext}$	(9,8)
$\circ M a_{CM} = F_{ext}$	(9,9)
$dL/dt = \tau_{ext}$	(9,21)
$\circ dL_{CM}/dt = \tau_{CM}$	(9,25)
$E_k - E_{k,0} = W_{ext} + W_{int}$	(9,30)
$U - U_0 = W_{ext}$	(9,35)
Definiciones de energía	
Energía propia, $U = E_k + E_{p,int}$	(9,33)
Energía interna, $U_{int} = E_{k,CM} + E_{p,int}$	(9,37)
Energía total $E = E_k + E_{p,int} + E_{p,ext}$	(9,36)

## 9.7 Colisiones

Cuando dos partículas se aproximan entre sí, su interacción mutua altera su movimiento, produciendo un intercambio de momentum y energía. Decimos entonces que ha habido una colisión (podemos decir lo mismo cuando tenemos dos sistemas en lugar de dos partículas). Esto no significa necesariamente que las dos partículas (o sistemas) hayan estado físicamente en contacto, en un sentido microscópico, como sucede en el caso de la colisión macroscópica entre dos bolas de billar o dos carros. Significa, en general, que ha ocurrido una interacción

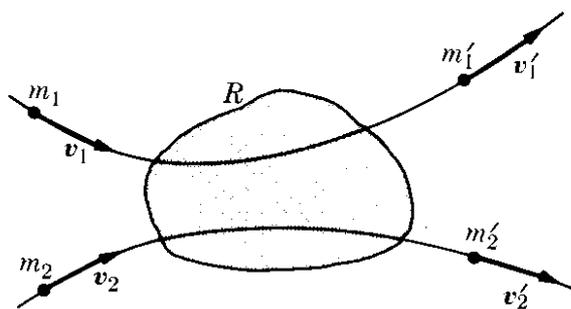


Fig. 9-11. Conservación de la energía y del momentum en una colisión.

cuando las dos partículas estaban próximas una de la otra, como sucede en la región sombreada de la Fig. 9-11, produciendo un cambio medible en sus movimientos en un intervalo de tiempo relativamente pequeño. Por ejemplo, si un electrón o un protón se aproximan a un átomo, las fuerzas eléctricas empiezan a actuar, produciendo una perturbación notable en los movimientos de las partículas. La curvatura de la trayectoria de un cometa cuando se aproxima al sistema solar es también un choque.

Algunas veces se utiliza el término *dispersión*

para referirse a choques en que las partículas (o sistemas) finales son las mismas que las iniciales.

En algunos choques, sin embargo, las partículas o sistemas finales no son necesariamente idénticas a las iniciales. Por ejemplo, en un choque entre un átomo *A* y una molécula *BC*, el resultado final puede ser la molécula *AB* y el átomo *C*. De hecho, ésta es la forma en que ocurren muchas reacciones químicas.

En un experimento de laboratorio sobre choques, uno generalmente conoce exactamente el movimiento de las partículas antes del choque, ya que dicho movimiento depende de cómo se ha preparado el experimento. Por ejemplo, una de las partículas puede ser un protón o un electrón acelerado por un acelerador electrostático y la otra partícula puede ser un átomo prácticamente en reposo en el laboratorio. Entonces se observa el estado final; esto es, el movimiento de las partículas ya muy lejos de la región de donde chocaron. Si conocemos las fuerzas entre las partículas, podemos computar el estado final, siempre y cuando conozcamos el estado inicial. El análisis de tales experimentos nos proporciona información valiosa acerca de la interacción entre las partículas que chocan. Esta es una de las razones por las cuales los experimentos de choque son tan interesantes para el físico.

Ya que sólo fuerzas internas entran en acción durante un choque, tanto el momentum como la energía totales son conservadas. Sean  $\mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{p}_2$  momenta de las partículas antes del choque y  $\mathbf{p}'_1$  y  $\mathbf{p}'_2$  momenta después del choque. La conservación del momentum requiere que

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 \quad (9.39)$$

La energía potencial interna antes del choque es  $E_{p,12}$ . Después del choque, debido a que puede haber reagrupaciones internas, dicha energía puede ser diferente, digamos  $E'_{p,12}$ . Análogamente, las masas no tienen porqué ser las mismas. Por ejemplo, un deuterón es un núcleo compuesto de un neutrón y un protón; al pasar cerca a otro núcleo, el neutrón puede ser capturado por el segundo núcleo, de manera que el protón continúa separadamente y las partículas finales consistirán de un protón y un núcleo con un neutrón extra.

La conservación de la energía, de acuerdo a la ec. (9.35), es entonces

$$E_k + E_{p,12} = E'_k + E'_{p,12},$$

donde, recordando la ec. (8.12), tenemos

$$E_k = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2}, \quad (9.40)$$

$$E'_k = \frac{1}{2}m'_1v'^2_1 + \frac{1}{2}m'_2v'^2_2 = \frac{p'^2_1}{2m'_1} + \frac{p'^2_2}{2m'_2}.$$

Introduzcamos una cantidad  $Q$ , definida por

$$Q = E'_k - E_k = E'_{p,12} - E_{p,12}, \quad (9.41)$$

y por consiguiente igual a la diferencia entre las energías cinéticas inicial y final o entre las energías potenciales internas. Cuando  $Q = 0$ , no hay cambio en la energía cinética y la colisión se llama *elástica*. Si no es así, es *inelástica*. Cuando  $Q < 0$ , hay disminución en la energía cinética con un correspondiente aumento en la energía potencial interna, y decimos entonces que hay una *colisión inelástica de primera clase (o endoérgica)*. Cuando  $Q > 0$ , hay aumento en la energía cinética a expensas de la energía potencial interna, y tenemos entonces una *colisión inelástica de segunda clase (o exoérgica)*.

Usando la ec. (9.40) en la ec. (9.41), podemos escribir

$$\frac{p'^2_1}{2m'_1} + \frac{p'^2_2}{2m'_2} = \frac{p^2_1}{2m_1} + \frac{p^2_2}{2m_2} + Q. \quad (9.42)$$

Las ecs. (9.39) y (9.42) son suficientes para resolver el problema del choque completamente.

Si referimos los choques al centro de masa, el momentum total es cero de acuerdo a la ec. (9.4), de modo que  $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$  y  $\mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2$ . Podemos entonces simplificar la ec. (9.42) para llegar a

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{m'_1} + \frac{1}{m'_2} \right) p'^2_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p^2_1 + Q$$

o, usando la ec. (9.15), que define la masa reducida, podemos obtener

$$\frac{p'^2_1}{2\mu'} = \frac{p^2_1}{2\mu} + Q \quad (\text{en el sistema-C de referencia}). \quad (9.43)$$

Nótese que usamos la misma  $Q$  porque, en virtud de su definición (9.41), es independiente del sistema de referencia. En un choque, hay siempre intercambio de momentum entre las dos partículas, pero no necesariamente intercambio de energía cinética entre ellas. Por ejemplo, si el choque es elástico ( $Q = 0$ ) y las partículas finales son las mismas que las iniciales ( $\mu = \mu'$ ), la ec. (9.43) da  $p_1 = p_1'$  y por consiguiente  $p_2' = p_2$ . Así en el sistema del centro de masa, los momenta después del choque elástico tienen las mismas magnitudes que antes y las partículas retienen sus energías cinéticas, de modo que no se intercambia energía cinética entre ellas con relación al centro de masa. Sin embargo ha habido un intercambio de momentum ya que las direcciones de sus movimientos han sido cambiadas.

**EJEMPLO 9.10.** Obtener el valor  $Q$  para una reacción de captura.

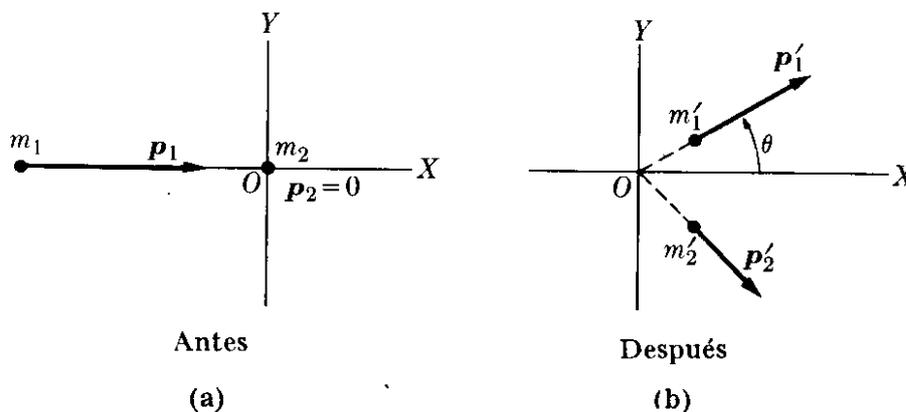
**Solución:** Un ejemplo interesante de choque inelástico ocurre cuando después de una colisión, las dos partículas continúan moviéndose juntas. En física nuclear este proceso se llama *reacción de captura*. Ocurre, por ejemplo, cuando un neutrón chocando con el protón de un átomo de hidrógeno es capturado para formar un núcleo de deuterio. Otra colisión que puede ser de este tipo es el choque entre dos cuerpos plásticos. En este caso, las dos partículas después de la colisión, se mueven juntas con la velocidad del centro de masa. Esto es, recordando el ejemplo 9.4

$$v_{\text{CM}} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

La  $Q$  de la reacción es entonces

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{\text{CM}}^2 - \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}m_2v_2^2 \\ &= -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 = -\frac{1}{2}\mu v_{12}^2, \end{aligned}$$

y por tanto  $Q$  depende completamente de las velocidades relativas antes del choque. ¿Puede el estudiante dar significado al valor obtenido para  $Q$ , en vista del resultado del ejemplo 9.9?



**Fig. 9-12.** Relación entre los momentos relativos al sistema- $L$  antes y después del choque.

**EJEMPLO 9.11.** Obtener  $Q$  en términos de la energía cinética de las partículas antes y después del choque, suponiendo que inicialmente  $m_1$  tiene un momentum

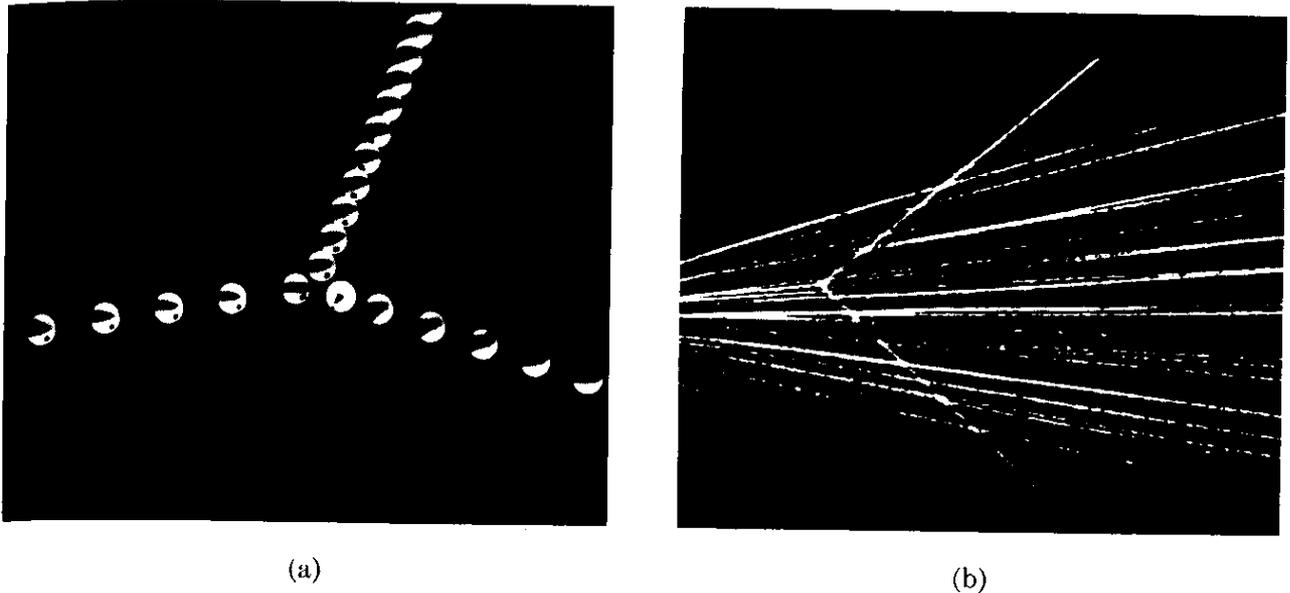


Fig. 9-13. (a) Choque de dos bolas de billar iguales. (b) Choque entre dos partículas  $\alpha$  (núcleos de helio). En ambos casos, una de las partículas estaba inicialmente en reposo en el sistema- $L$ , y los momenta de las partículas son perpendiculares entre sí en el sistema  $L$  después del choque. La figura (a) es cortesía de Educational Services, Inc.

y que  $m_2$  está en reposo ( $\mathbf{p}_2 = 0$ ) (ver la Fig. 9-12). Suponer también que las masas de las partículas después del choque son  $m'_1$  y  $m'_2$ .

**Solución:** La conservación del momentum da  $\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_1$  o  $\mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1$ . Por consiguiente

$$p_2'^2 = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)^2 = p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1 p_1' \cos \theta.$$

Usando la definición (9.41) para  $Q$  tenemos

$$Q = \frac{p_1'^2}{2m'_1} + \frac{p_2'^2}{2m'_2} - \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m'_1} - \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{1}{2m'_2} (p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1 p_1' \cos \theta)$$

o sea

$$Q = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m'_1} + \frac{1}{m'_2} \right) p_1'^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m'_2} - \frac{1}{m_1} \right) p_1^2 - \frac{p_1 p_1'}{m'_2} \cos \theta.$$

Recordando que  $E_k = p^2/2m$ , podemos expresar el resultado anterior como

$$Q = E'_{k,1} \left( 1 + \frac{m'_1}{m'_2} \right) - E_{k,1} \left( 1 - \frac{m_1}{m'_2} \right) - \frac{2\sqrt{m_1 m'_1 E_{k,1} E'_{k,1}}}{m'_2} \cos \theta.$$

Este resultado, conocido como la ecuación  $Q$  es de mucha aplicación en física nuclear.

Cuando la colisión es elástica ( $Q = 0$ ) y todas las partículas son idénticas ( $m_1 = m'_1 = m_2 = m'_2$ ), la conservación de la energía da  $p_1'^2 + p_2'^2 = p_1^2$ , mientras que la conservación del momentum da  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2$ , permitiéndonos obtener  $p_1'^2 + p_2'^2 + 2\mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2 = p_1^2$ . Combinando estos resultados obtenemos  $\mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2 = 0$  o sea que  $\mathbf{p}'_1$  es perpendicular a  $\mathbf{p}'_2$ . Por tanto, en el sistema  $L$ , las dos partículas se mueven en ángulo recto después de la colisión. Esto puede apreciarse en la fotografía de la Fig. 9-13 (a), que ilustra la colisión de dos bolas de billar, una inicialmente en reposo. La Fig. 9-13 (b) muestra la colisión de dos núcleos de helio en una cámara de niebla; el núcleo de

helio incidente es una partícula  $\alpha$  proveniente de una sustancia radioactiva y el núcleo de helio que es blanco, pertenece al gas de la cámara. En ambos casos las dos partículas se mueven en ángulo recto después del choque.

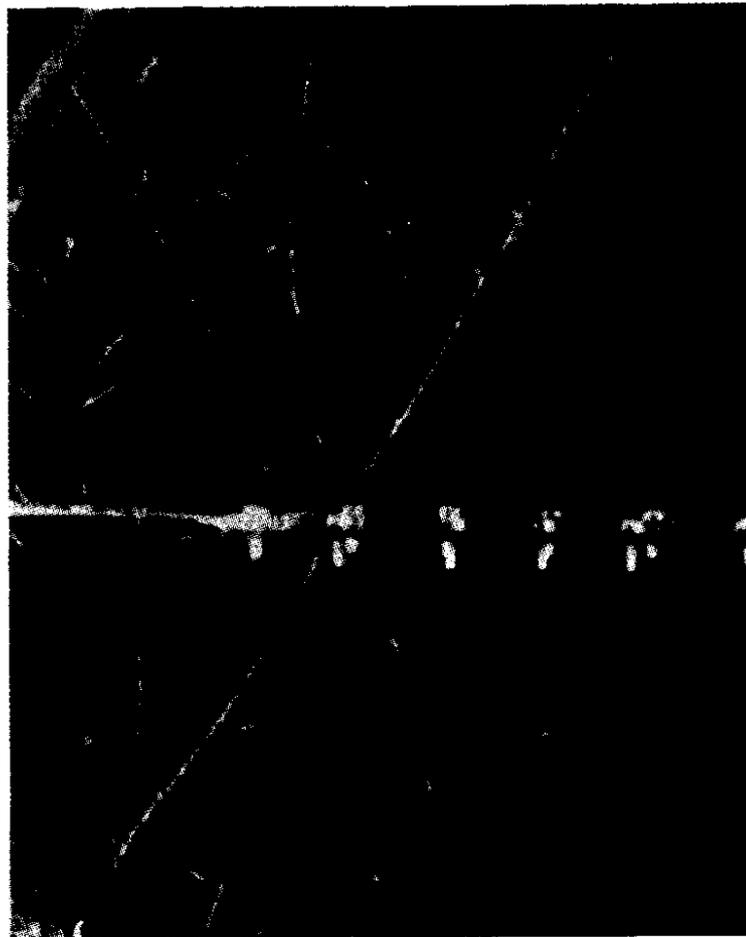
**EJEMPLO 9.12.** Una granada en reposo en el sistema- $L$  explota en dos fragmentos. Hallar las energías de los fragmentos en términos de  $Q$ .

**Solución:** Como la granada estaba inicialmente en reposo, el momentum total es cero. Después de la explosión los dos fragmentos se separan en direcciones opuestas con momenta  $\mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{p}_2$  de tal modo que  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$ , o en magnitud  $p_1 = p_2$ . Entonces, a partir de la ec. (9.41), con  $E'_k = p_1^2/2m + p_2^2/2m$  y  $E_k = 0$ , obtenemos

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p_1^2 = Q \quad \text{y} \quad p_1 = p_2 = (2\mu Q)^{1/2}.$$

Las energías cinéticas de los fragmentos son

$$E_{k,1} = \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{m_2 Q}{m_1 + m_2}, \quad E_{k,2} = \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{m_1 Q}{m_1 + m_2},$$



**Fig. 9-14.** Fotografía, en cámara de niebla, de las trayectorias de dos fragmentos producto de la fisión de un núcleo de uranio [Bøggild, Brostrøm y Lauritsen, *Phys. Rev.* 59, 275 (1941)]. Inicialmente el núcleo de uranio se hallaba en reposo sobre la delgada placa metálica horizontal al centro de la fotografía. Los dos fragmentos se mueven en direcciones opuestas. Por el análisis de las trayectorias puede estimarse las energías de los fragmentos, las que a su vez (usando la relación derivada en el ejemplo 9.12) nos permiten obtener la razón de sus masas. Se desprecia el efecto de los neutrones liberados.

y son inversamente proporcionales a sus masas. Este análisis se aplica igualmente al retroceso de un arma de fuego (recordar el ejemplo 7.1), a la fisión de un núcleo en dos fragmentos, ilustrada en la Fig. 9-14, o a la disociación de una molécula diatómica.

Si hay tres fragmentos en vez de dos, son posibles varias soluciones, ya que están en juego tres momenta, pero sólo dos condiciones físicas: conservación de la energía y del momentum. Por ejemplo, si solamente son observadas dos partículas en una reacción y la energía y el momentum de ellas no son conservados, el físico sospecha la presencia de una tercera partícula que no es observada (ya sea porque no tiene carga eléctrica, o por alguna otra razón). Puede haber también consideraciones teóricas que le permitan reconocer que hay tres partículas en el proceso (ver el problema 9.70). El físico asigna entonces un cierto momentum y una cierta energía a su partícula hipotética, de modo de respetar las leyes de conservación. Este procedimiento hasta la fecha ha dado siempre resultados consistentes tanto con la teoría como con el experimento.

**EJEMPLO 9.13.** Discutir la retardación (o moderación) de neutrones que chocan elásticamente al moverse a través de un material cuyos átomos pueden ser considerados en reposo. (El material se llama moderador). En los reactores nucleares, los neutrones rápidos producidos por la fisión del uranio son retardados al moverse a través de un moderador.

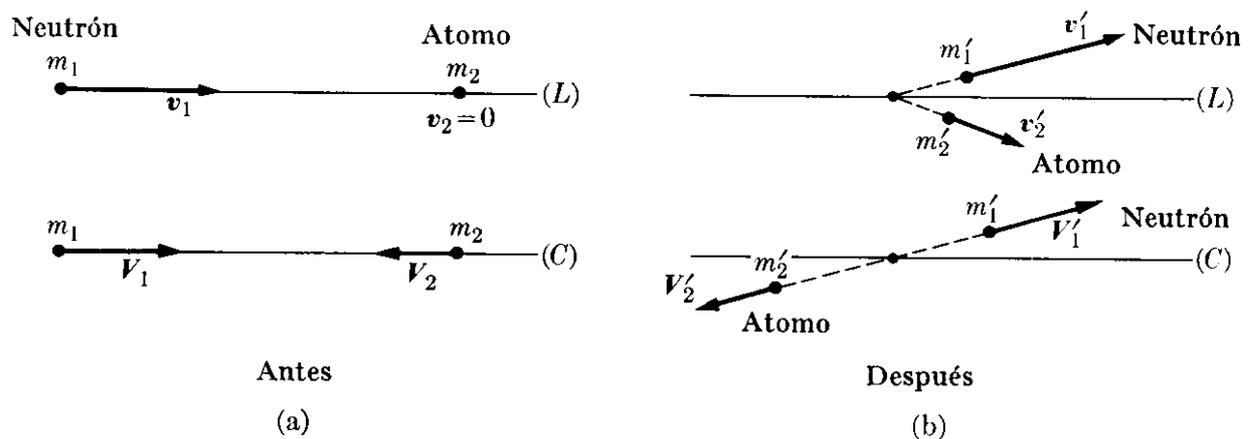


Fig. 9-15. Comparación de datos relativos a los sistemas  $L$  y  $C$  en un choque.

**Solución:** En este caso las partículas son las mismas antes y después del choque y  $m_1 = m'_1$ ,  $m_2 = m'_2$ . También  $p_2 = 0$  y  $Q = 0$ . El cálculo es más fácil si trabajamos en el sistema de referencia  $C$  (Fig. 9-15). Llamaremos  $A = m_2/m_1$  la razón de las masas de los átomos del moderador con las del neutrón,  $v_1$  la velocidad del neutrón, y  $v_2 (= 0)$  la velocidad del átomo. Antes de la colisión la velocidad del centro de masa de acuerdo a la ec. (9.1) es

$$v_{\text{CM}} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{v_1}{1 + A}.$$

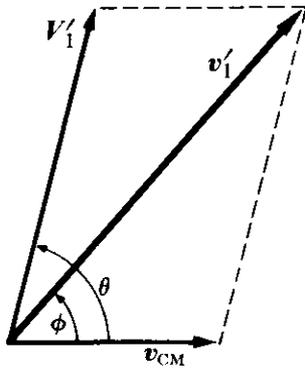
La velocidad de cada partícula en el sistema del centro de masa antes de la colisión es

$$V_1 = v_1 - v_{\text{CM}} = \frac{A v_1}{1 + A}, \quad V_2 = 0 - v_{\text{CM}} = -\frac{v_1}{1 + A}. \quad (9.44)$$

Dado que estamos tratando de una colisión elástica en la que las partículas retienen su identidad, tenemos, de acuerdo a la explicación inmediatamente posterior a la

ec. (9.42), que  $p_1 = p'_1$  en el sistema del centro de masa, y que por consiguiente también  $V_1 = V'_1$ ; esto es, la velocidad de  $m_1$  tiene la misma *magnitud* en el sistema-C antes y después de la colisión. Análogamente  $V_2 = V'_2$ . Sin embargo, las direcciones del movimiento después de la colisión pueden ser diferentes en el sistema del centro de masa (ver la Fig. 9-15). La velocidad  $v_1$  del neutrón después del choque, relativa al sistema-L, es entonces

$$v'_1 = V'_1 + v_{\text{CM}},$$



de modo que, de acuerdo con la Fig. 9-16,

$$\begin{aligned} v_1'^2 &= V_1'^2 = v_{\text{CM}}^2 + 2V_1' \cdot v_{\text{CM}} \\ &= V_1'^2 + v_{\text{CM}}^2 + 2V_1'v_{\text{CM}} \cos \Phi. \end{aligned}$$

Usando las ec. (9.44) y recordando que  $V_1' = V_1$ , obtenemos

$$v_1'^2 = v_1^2 \frac{A^2 + 2A \cos \Phi + 1}{(A + 1)^2}.$$

Figura 9-16

La relación entre la energía cinética de  $m_1$  después y antes de la colisión en el sistema-L es entonces

$$\frac{E'_{k,1}}{E_{k,1}} = \frac{v_1'^2}{v_1^2} = \frac{A^2 + 2A \cos \Phi + 1}{(A + 1)^2}.$$

Para  $\Phi = 0$  (esto es, para un choque sin cambio en la dirección)  $E'_{k,1} = E_{k,1}$  y no hay pérdida de energía cinética. Para  $\Phi = \pi$ , choque central, hay una pérdida máxima de energía dando como resultado

$$\frac{E'_k}{E_k} = \frac{A^2 - 2A + 1}{(A + 1)^2} = \left( \frac{A - 1}{A + 1} \right)^2.$$

La pérdida de energía por unidad de energía es en este caso

$$\frac{E_k - E'_k}{E_k} = \frac{4A}{(A + 1)^2}.$$

La pérdida de energía es mayor cuanto más cerca esté  $A$  de la unidad. Este resultado es importante al escoger el material moderador para retardar rápidamente los neutrones, como debe ser en los reactores nucleares. Los átomos con los valores más pequeños de  $A$  son los del hidrógeno ( $A \cong 1$ ), y por esta razón es de esperar que el hidrógeno puro sea el mejor moderador. Sin embargo, a la temperatura ambiente, el hidrógeno puro es gaseoso de manera que el número de átomos de hidrógeno por unidad de volumen es relativamente pequeño. Por consiguiente se usa más bien el agua. El agua no solamente tiene la ventaja de ser abundante y barata, sino que además contiene por unidad de volumen alrededor de  $10^3$  veces más átomos de hidrógeno que el hidrógeno gaseoso. Infortunadamente, los átomos de hidrógeno tienden a capturar neutrones para formar deuterio. Por otra parte, como los átomos de deuterio tienen relativamente poca tendencia de capturar neutrones, algunos reactores nucleares usan *agua pesada*, cuyas moléculas están formadas por deuterio (en vez de hidrógeno) y oxígeno. (En este caso  $A = 2$ ). Otro moderador común es el carbón ( $A = 12$ ), usado en la forma de grafito.

## II. SISTEMAS CON UN GRAN NUMERO DE PARTICULAS

### 9.8 Sistemas de muchas partículas: temperatura

El resultado expresado por la ec. (9.35) o su equivalente, la ley de conservación de la energía, al ser aplicado a un sistema compuesto de un número pequeño de partículas, tal como nuestro sistema planetario o un átomo con pocos electrones, requiere el cómputo de varios términos que forman la energía interna, de acuerdo con la ec. (9.34). Sin embargo, cuando el número de partículas es muy grande, tal como en un átomo de muchos electrones o un gas compuesto de millones de moléculas, el problema resulta demasiado complicado matemáticamente. Debemos entonces usar ciertos métodos estadísticos para computar valores promedio de las cantidades dinámicas en vez de valores individuales precisos para cada componente del sistema. Además, en los sistemas complejos no estamos interesados en el comportamiento de cada componente individual (ya que dicho comportamiento no es observable en general) sino en el comportamiento del sistema como un todo. La técnica matemática para tratar esos sistemas constituyen lo que se llama la *mecánica estadística*. Si nos olvidamos por un momento de la estructura interna del sistema y simplemente aplicamos la ec. (9.35), usando valores *medidos experimentalmente* para  $U$  y  $W$ , estamos empleando otra rama de la física, la *termodinámica*. En el presente capítulo nos limitaremos a efectuar una adaptación de la ec. (9.35) para los sistemas compuestos de muchas partículas sin entrar a discutir los métodos de la mecánica estadística o los de la termodinámica. También expresaremos, a menos que se especifique lo contrario, todas las cantidades dinámicas con relación al sistema-C para el caso considerado.

Definamos primero la *temperatura*  $T$  del sistema como una cantidad relacionada con la energía cinética *promedio* de las partículas en el sistema-C. Por tanto la temperatura es definida independientemente del movimiento del sistema relativo al observador. La energía cinética promedio de una partícula es

$$E_k = \frac{1}{N} (\sum_i \frac{1}{2} m v_i^2), \quad (9.45)$$

donde  $N$  es el número total de partículas y  $v_i$  es la velocidad de la partícula en el sistema-C. Si todas las partículas tienen la misma masa, entonces

$$E_k = \frac{1}{N} \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m \left( \frac{1}{N} \sum_i v_i^2 \right) = \frac{1}{2} m (\overline{v^2}) = \frac{1}{2} m v_{\text{rms}}^2,$$

donde  $v_{\text{rms}}$  se llama la “velocidad media cuadrática de las partículas”, definida como

$$v_{\text{rms}}^2 = (\overline{v^2}) = \frac{1}{N} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots) = \frac{1}{N} (\sum_i v_i^2).$$

No necesitamos indicar aquí la relación precisa entre la temperatura y la energía cinética promedio. Es suficiente por el momento suponer que, dada la energía cinética promedio en un sistema, podemos computar la temperatura del sistema, y recíprocamente. En este sentido hablamos de la temperatura de un sólido, de un gas, y aún de un núcleo complejo.

El hecho de que estemos refiriendo los movimientos al centro de masa para definir la temperatura es importante. Supongamos que tenemos una esfera metálica “caliente” en reposo en nuestro laboratorio y una esfera metálica “fría” moviéndose muy rápido con relación a nuestro laboratorio. La bola “caliente” tiene una temperatura alta, lo que significa una gran energía cinética relativa al centro de masa, el que en este caso está en reposo con relación al laboratorio. Por otra parte, la bola “fría” tiene una temperatura baja, lo que significa una energía cinética pequeña con relación al centro de masa, que en nuestro caso está en movimiento con relación al observador. La bola “fría” moviéndose rápidamente puede tener una energía cinética total con relación al laboratorio que sea mayor que la de la bola “caliente” lenta, pero la mayor parte de ella es energía cinética de traslación y por tanto no entra en el cálculo de la temperatura.

Un sistema que tiene la misma temperatura a través de todas sus partes, de modo que la energía cinética promedio de las partículas en cualquier región del sistema es la misma, se dice que está en *equilibrio térmico*. En un sistema aislado, cuya energía interna es constante, la temperatura puede cambiar si la energía cinética interna cambia, debido a un cambio en la energía potencial interna. Por ejemplo, una masa de gas en el espacio interestelar puede estarse condensando debido a fuerzas atractivas muy fuertes, que determinan una disminución de energía potencial interna y un correspondiente aumento de la energía cinética. Como resultado de ello, la temperatura debería aumentar. Si, por otra parte, el sistema se está expandiendo, su energía potencial interna aumenta (si las fuerzas son atractivas), produciendo una disminución en la energía cinética y, por tanto, una disminución en la temperatura. Pero si la energía potencial interna de un sistema aislado permanece constante, que es el caso de un gas contenido en una caja rígida, entonces la energía cinética promedio del sistema permanecería constante; esto es, su temperatura no cambiará. Cuando el sistema no está aislado, puede intercambiar energía con el resto del universo, lo que puede resultar en un cambio de su energía cinética interna y, por tanto, de su temperatura.

La temperatura debiera ser expresada en joules por partícula. Sin embargo, es costumbre expresarla en *grados*. La escala de temperatura usada en física es la escala *absoluta*. La unidad se llama *Kelvin*, y se denota por K. En esta escala, la temperatura de fusión del hielo a presión atmosférica normal es 273,15 K y la temperatura de ebullición del agua a presión atmosférica normal es 373,15 K. Por tanto la diferencia entre esas dos temperaturas es 100 K. La temperatura en *grados centígrado* o Celsius, designado por °C se define de acuerdo a  $\theta_C = T - 273,15 \text{ K}$ . Un Kelvin corresponde a aproximadamente  $1,38 \times 10^{-23} \text{ J}$  (ó  $8,61 \times 10^{-4} \text{ eV}$ ) por partícula.

### 9.9 *Sistemas de muchas partículas: trabajo*

El intercambio de energía de un sistema con el mundo exterior es representado por el trabajo externo  $W_{\text{ext}}$  en la ec. (9.35). Esto es,

$$U - U_0 = W_{\text{ext}}.$$

Si el trabajo es hecho *en* el sistema ( $W_{\text{ext}}$  positivo), su energía interna aumenta, pero si el trabajo es hecho *por* el sistema ( $W_{\text{ext}}$  negativo), su energía interna disminuye. Este trabajo externo es la suma de los trabajos externos individuales hechos en cada una de las partículas del sistema, pero a veces puede ser fácilmente computado estadísticamente.

Consideremos, por ejemplo, un gas dentro de un cilindro, una de cuyas paredes es un pistón movable (Fig. 9-17). El gas puede intercambiar energía y momentum con las vecindades a través de los choques e interacciones de sus moléculas con las moléculas de las paredes. El intercambio del momentum está representado por una fuerza ejercida por cada molécula en el punto de colisión con la pared. Esas fuerzas individuales fluctúan en cada punto, pero debido a que hay un gran número de colisiones sobre un área grande, el efecto total puede ser representado por una fuerza  $F$  actuante sobre la totalidad del área. Si  $A$  es el área y  $p$  la *presión* del gas, definida como la fuerza promedio por unidad del área (recordar el ejemplo 9.2), entonces

$$p = F/A \quad \text{ó} \quad F = pA. \quad (9.46)$$

Si una de las paredes del recipiente es movable, tal como el pistón de la Fig. 9-17, la fuerza ejercida por el gas puede producir un desplazamiento  $dx$  de la pared. El intercambio de energía del sistema con el mundo exterior puede entonces ser expresado como el trabajo hecho por esta fuerza durante el desplazamiento. Ya que éste es trabajo hecho *por* el sistema y no trabajo hecho *en* el sistema, podemos considerarlo negativo. Por consiguiente

$$dW_{\text{ext}} = -F dx = -pA dx = -p dV, \quad (9.47)$$

donde  $dV = A dx$  es el cambio de volumen del gas. Entonces si el volumen cambia de  $V_0$  a  $V$ , el trabajo externo hecho en el sistema será

$$W_{\text{ext}} = - \int_{V_0}^V p dV. \quad (9.48)$$

Para computar esta integral, debemos conocer la relación entre  $p$  y  $V$ . Esta relación ha sido estudiada para gases y otras sustancias en gran detalle.

Muy a menudo, especialmente al tratar de máquinas térmicas, es preferible computar el trabajo exterior hecho *por* el sistema, denotado por  $W_{\text{sist}}$ , en vez del trabajo externo hecho *sobre* el sistema,  $W_{\text{ext}}$ . Ya que ambos trabajos corresponden al mismo desplazamiento, pero a fuerzas iguales y opuestas, son iguales entre sí en magnitud pero tienen signos opuestos; esto es,  $W_{\text{sist}} = -W_{\text{ext}}$ . Entonces, por ejemplo, el trabajo de expansión hecho por un gas, usando la ec. (9.48), es

$$W_{\text{sist}} = \int_{V_0}^V p dV. \quad (9.49)$$

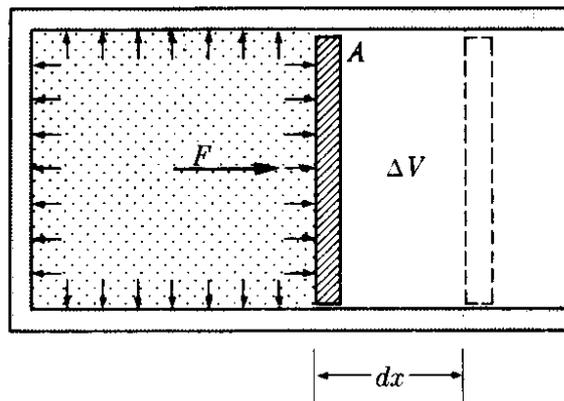


Fig. 9-17. Trabajo hecho en una expansión gaseosa.

Indicaremos ahora alguna de las unidades más comunes en que se expresa la presión. Notemos primero que la presión debe ser expresada como una unidad de fuerza dividida por una unidad de área. Por tanto en el sistema MKSC la presión se mide en *newtons por metro cuadrado*, o  $\text{N m}^{-2}$ . Otras unidades frecuentemente usadas son las *dinas por centímetro cuadrado*, o  $\text{din cm}^{-2}$ , y *kilogramos-fuerza por centímetro cuadrado* ( $\text{kgf cm}^{-2}$ ). Otra unidad muy útil, usada principalmente para expresar la presión de los gases, es la *atmósfera*, que se abrevia atm, definida de acuerdo a las equivalencias

$$1 \text{ atm} = 1,013 \times 10^5 \text{ N m}^{-2} = 1,033 \text{ kgf cm}^{-2}.$$

Una atmósfera es, aproximadamente, la presión normal ejercida por la atmósfera de la tierra sobre los cuerpos al nivel del mar.

**EJEMPLO 9.14.** Un gas ocupa un volumen de  $0,30 \text{ m}^3$ , ejerciendo una presión de  $2 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$ . A una presión constante, el volumen se expande hasta  $0,45 \text{ m}^3$ . Hallar el trabajo hecho por el gas.

**Solución:** Usando la ec. (9.49), cuando la presión  $p$  permanece constante,

$$W_{\text{sist}} = \int_{V_0}^V p dV = p \int_{V_0}^V dV = p(V - V_0). \quad (9.50)$$

Este resultado es completamente general y se aplica a cualquier sistema cuyo volumen cambia bajo presión constante. Entonces, sustituyendo los valores numéricos obtenemos  $W_{\text{sist}} = 3 \times 10^4 \text{ J}$ .

**EJEMPLO 9.15.** Un gas se expande de modo de respetar la relación  $pV = C$  (constante). Esta relación [ver la ec. (9.62) y el Problema 9.67] requiere que la temperatura del gas permanezca constante, y constituye la *ley de Boyle*. Hallar el trabajo efectuado cuando el volumen se expande de  $V_1$  a  $V_2$ .

**Solución:** Usando la ec. (9.49), obtenemos

$$W_{\text{sist}} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{C dV}{V} = C \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (9.51)$$

Por tanto el trabajo hecho depende de la razón  $V_2/V_1$  entre los dos volúmenes (llamada la *razón de expansión*). En el diseño de motores de combustión interna la razón de compresión (o expansión) es uno de los factores determinantes de la potencia del motor.

## 9.10 *Sistemas de muchas partículas: calor*

Es importante recordar que la ec. (9.48) expresa un *promedio macroscópico* que suma todos los intercambios individuales de energía entre las moléculas del gas y las moléculas del pistón. Pero, ¿cómo se puede computar el intercambio de energía que ocurre debido a la interacción de las moléculas de gas con las paredes que permanecen fijas? En este caso, el método usado para evaluar  $W$  para el pistón no puede aplicarse, ya que, aunque definamos todavía la fuerza promedio sobre la pared, no podemos definir un desplazamiento promedio de la pared.

En cada interacción individual entre las moléculas del gas y la pared, se ejerce una pequeña fuerza y se produce un pequeño desplazamiento de las moléculas en la pared. Si pudiéramos computar cada una de esas cantidades infinitesimales de trabajo y sumarlas, tendríamos el trabajo exterior correspondiente hecho por el sistema. Sin embargo, esta técnica es obviamente casi imposible debido al gran número de factores que intervienen. Por consiguiente, definiremos un nuevo concepto macroscópico o estadístico llamado *calor*.

El valor promedio del trabajo externo o la energía intercambiada entre un sistema y el medio que lo rodea debido a intercambios individuales de energía que ocurren como resultado de choques entre moléculas del sistema y moléculas del medio que lo rodea se llama *calor*,  $Q$ , siempre que no pueda expresarse macroscópicamente como fuerza por distancia. Por consiguiente,  $Q$  está compuesta de una suma de un gran número de trabajos externos individuales muy pequeños, tales que no pueden ser expresados colectivamente como una fuerza promedio por una distancia promedio.

El calor  $Q$  se considera positivo cuando corresponde a un trabajo externo neto hecho *sobre* el sistema y negativo cuando es equivalente a un trabajo externo neto hecho *por* el sistema. En el primer caso decimos que el calor es *absorbido* por el sistema y en el segundo caso decimos que el calor es *perdido* por el sistema.

Ya que el calor corresponde a un trabajo, debe expresarse en joules. Sin embargo, el calor se expresa algunas veces en una unidad llamada *caloría*, cuya definición fue adoptada en 1948 como  $1 \text{ caloría} = 4,1840 \text{ J}$ . La caloría fue introducida originalmente como unidad de calor cuando la naturaleza de éste era desconocida. Pero la caloría es simplemente otra unidad para medir trabajo y energía, y no solamente calor.

Este es el momento de prevenir al estudiante a fin de que no considere el calor como una nueva o diferente forma de energía. Es simplemente, el nombre dado a una transferencia de trabajo y energía de tipo especial, en la cual participan un gran número de partículas. Antes de que los conceptos de interacción y de la estructura atómica de la materia fueran claramente comprendidos, los físicos clasificaron la energía en dos grupos: energía *mecánica* correspondiente a las energías cinética y potencial gravitatoria, y energía *no mecánica*, dividida en calor, energía química, energía eléctrica, radiación, etc. Esta división ya no se justifica. Ahora los físicos reconocen solamente energía cinética y potencial, denotando la energía potencial con una diferente expresión según la naturaleza de la interacción física correspondiente, y denotando con calor y radiación dos mecanismos de transferencia de energía. La energía química es simplemente un término macroscópico para describir la energía asociada con las interacciones eléctricas en los átomos y las moléculas, energía que se manifiesta en procesos químicos; esto es, en redistribuciones atómicas dentro de las moléculas.

Cuando no hay intercambio de energía (en la forma de calor) entre dos sistemas, decimos que están en *equilibrio térmico*. Este es un concepto estadístico, ya que las moléculas individuales pueden intercambiar energía, pero, en promedio, la misma cantidad de energía se intercambia en una dirección que en la otra. *Para que exista equilibrio térmico entre dos sistemas, las energías cinéticas*

moleculares promedio en los dos sistemas interactuantes deben ser las mismas, de modo que no sea posible un intercambio neto de energía cinética por colisión molecular. Por consiguiente, en vista de nuestra definición preliminar de temperatura dada en la sección 9.8 podemos decir que

*dos sistemas en equilibrio térmico deben estar a la misma temperatura.*

Podemos también concluir que la energía se intercambia como calor solamente cuando la temperatura de los dos sistemas es diferente.

### 9.11 Reformulación del principio de conservación de la energía para los sistemas de muchas partículas

En las dos secciones previas hemos visto que, al tratar de sistemas compuestos por un gran número de partículas, deberíamos expresar el *trabajo total externo* como la suma de dos partes:  $Q + W_{\text{ext}}$ . Aquí  $W_{\text{ext}}$  expresa el trabajo externo que puede ser computado como el producto de una fuerza promedio por una distancia, tal como se discutió en la sección 9.9, y  $Q$  representa el trabajo externo cuando debe ser expresado como calor, según la discusión de la sección 9.10. La ec. (9.35) para el principio de la conservación de la energía debe ser entonces escrita en la siguiente forma

$$U - U_0 = Q + W_{\text{ext}}, \quad (9.52)$$

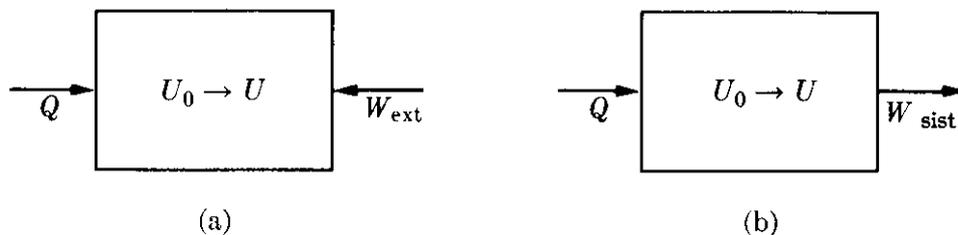


Fig. 9-18. Relación entre el calor, el trabajo y la energía interna.

lo cual puede ser expresado en palabras así:

*el cambio de energía interna de un sistema es igual al calor absorbido más el trabajo externo efectuado sobre el sistema.*

La ec. (9.52) puede ser representada gráficamente por la Fig. 9-18(a): El calor  $Q$  es *absorbido por* el sistema mientras el trabajo  $W_{\text{ext}}$  es *efectuado sobre* el sistema. Su suma  $Q + W_{\text{ext}}$  es almacenada como energía interna  $U - U_0$  del sistema. Algunas veces, especialmente en aplicaciones de ingeniería, en lugar de escribir el trabajo externo  $W_{\text{ext}}$  hecho *sobre* el sistema, se escribe el trabajo externo  $W_{\text{sist}}$  hecho *por* el sistema, el cual, como se explicó anteriormente, tiene signo opuesto al del trabajo hecho sobre el sistema. Haciendo  $W_{\text{ext}} = -W_{\text{sist}}$ , tenemos, en vez de la ec. (9.52),

$$U - U_0 = Q - W_{\text{sist}}. \quad (9.53)$$

La ec. (9.53) está ilustrada en la Fig. 9-18(b): el calor  $Q$  es *absorbido* por el sistema, el trabajo  $W_{\text{sist}}$  es *hecho por* el sistema, y la diferencia  $Q - W_{\text{sist}}$  es *almacenada* como energía interna  $U - U_0$  del sistema.

Los enunciados relativos a las ecs. (9.52) y (9.53) constituyen lo que se llama la *primera ley de la termodinámica*, que es simplemente la ley de conservación de la energía aplicada a sistemas de gran número de partículas, con el trabajo externo convenientemente dividido en dos términos estadísticos, uno de ellos todavía llamado trabajo y el otro llamado calor. Lo que se ha dicho es suficiente para que el estudiante comprenda el significado de los conceptos de calor y temperatura tal como se usarán en los capítulos siguientes y por ello no proseguiremos por el momento con estos asuntos termodinámicos. (Ver el tercer volumen de esta serie).

### 9.12 Teorema del virial para muchas partículas

En esta sección extenderemos el teorema del virial, introducido en la sección 8.13 para el caso de una sola partícula, a un sistema de muchas partículas. En su nueva forma es aplicable a la discusión de las propiedades estadísticas o promedio de sistemas compuestos por muchas partículas, especialmente los gases.\*

Consideremos primero, por simplicidad, un sistema compuesto de dos partículas,  $m_1$  y  $m_2$ . Definimos la cantidad escalar

$$A = m_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{r}_2 = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{r}_i, \quad (9.54)$$

que es simplemente una extensión de la cantidad  $A$  definida para una sola partícula. Tomando la derivada temporal de  $A$ , tenemos

$$\frac{dA}{dt} = m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \cdot \mathbf{r}_1 + m_1 \mathbf{v}_1 \cdot \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} \cdot \mathbf{r}_2 + m_2 \mathbf{v}_2 \cdot \frac{d\mathbf{r}_2}{dt},$$

o, dado que  $\mathbf{v}_1 = d\mathbf{r}_1/dt$ ,  $\mathbf{v}_2 = d\mathbf{r}_2/dt$ ,  $\mathbf{a}_1 = d\mathbf{v}_1/dt$  y  $\mathbf{a}_2 = d\mathbf{v}_2/dt$ , entonces

$$\frac{dA}{dt} = (m_1 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{r}_2) + (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2).$$

El último término de la derecha, de acuerdo a la ec. (9.29), es el doble de la energía cinética,  $E_k$ , del sistema. Podemos entonces escribir

$$\frac{dA}{dt} = 2E_k + (m_1 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{r}_2).$$

\* Para una aplicación elemental del teorema del virial a problemas químicos, ver B. H. Mahan, *Química, Curso universitario*, Bogotá, Colombia: Fondo Educativo Interamericano, S. A., 1968, pág. 412.

Usando la ec. (9.26) y recordando que  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$  y  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{12}$ , vemos que

$$\begin{aligned} m_1 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{r}_2 &= (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12}) \cdot \mathbf{r}_1 + (\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21}) \cdot \mathbf{r}_2 \\ &= \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_{12} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ &= \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_{12} \cdot \mathbf{r}_{12}. \end{aligned}$$

Por tanto nuestra ecuación se transforma ahora en

$$\frac{dA}{dt} = 2E_k + (\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_{12} \cdot \mathbf{r}_{12}) = 2E_k + B,$$

donde, para simplificar la escritura, hemos llamado  $B$  a la expresión dentro del paréntesis. Tomando el promedio temporal de esta ecuación tenemos

$$\overline{\left[ \frac{dA}{dt} \right]} = 2\overline{E_k} + B. \quad (9.55)$$

Recordando la definición del promedio temporal dada en la sección 8.13 y el resultado obtenido en la ec. (8.46), tenemos nuevamente

$$\overline{\left[ \frac{dA}{dt} \right]} = \frac{A - A_0}{\tau}.$$

Si el tiempo  $\tau$  es muy largo y  $A$  no aumenta indefinidamente con el tiempo, la cantidad  $(A - A_0)/\tau$  puede llegar a ser tan pequeña que se considere cero. Ello ocurre si el sistema está limitado, como en el caso de un gas en un recipiente, porque entonces  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ , y también  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$ , en la ec. (9.54) no pueden aumentar indefinidamente. Por tanto, poniendo  $\overline{(dA/dt)} = 0$  en la ec. (9.55), encontramos

$$2\overline{E_k} = -B = -\overline{(\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_{12} \cdot \mathbf{r}_{12})}.$$

Si en vez de dos partículas tenemos muchas, la ecuación puede generalizarse

$$E_k = -\frac{1}{2} \overline{\left( \sum_{\text{Todas las partículas}} \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i + \sum_{\text{Todos los pares de partículas}} \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} \right)}, \quad (9.56)$$

donde la primera suma en el lado derecho se refiere a las fuerzas exteriores actuantes sobre *cada* partícula y la segunda suma se refiere a las fuerzas interiores entre *pares* de partículas. La ec. (9.56) se llama el *teorema del virial* para un sistema de partículas, mientras que la cantidad en el lado derecho se llama el *virial del sistema*.

### 9.13 Ecuación de estado de un gas

Una de las aplicaciones más interesantes del teorema del virial es la derivación de la ecuación de estado de un gas. Por ecuación de estado entendemos una ecuación que describe la relación entre cantidades macroscópicas tales como presión,

volumen, y temperatura, que especifican el estado de un sistema. Por supuesto, esas magnitudes macroscópicas o estadísticas son el resultado directo de la estructura interna del sistema y, bajo hipótesis apropiadas, debiéramos ser capaces de establecer una correlación entre la estructura interna y el comportamiento macroscópico.

Supongamos que un gas está compuesto de moléculas sujetas a interacciones mutuas y a interacciones con las paredes del recipiente. Supongamos también, por simplicidad, que el recipiente es un cubo de lado  $A$  (la prueba más general no requiere de esta limitación) como se muestra en la Fig. 9.19.

Evaluemos la ec. (9.56) empezando con la primera suma, correspondiente a las fuerzas exteriores. Una molécula experimenta una fuerza exterior solamente cuando choca con las paredes y rebota. Podemos suponer que dicha fuerza es perpendicular a la pared, una hipótesis que es sólo estadísticamente correcta. En la pared  $OEGH$ , con  $x = 0$  en todos los puntos de la misma, una molécula que llegue al punto  $P$ , por ejemplo, sufre una fuerza  $\mathbf{F}_i = u_x \mathbf{F}_i$ . Por tanto  $\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = F_i x_i = 0$ , y la pared  $OEGH$  no contribuye al virial, ya que nuestra selección de origen hace que  $x_i = 0$ . El mismo resultado se obtiene con las paredes  $OBCE$  y  $OHAB$ .

Considerando ahora la pared  $ABCD$ , una partícula que llegue a  $Q$ , por ejemplo, siente una fuerza paralela, pero de dirección opuesta a  $OX$ ; esto es,  $\mathbf{F}_i = -u_x \mathbf{F}_i$ , y, todas las partículas que choquen con esta pared tienen  $x_i = a$ . Por consiguiente  $\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = -F_i a$ . La suma  $\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i$  para la pared considerada es  $-\sum_i F_i a = -(\sum_i F_i) a = -Fa = -pa^3$ , donde, usando la ec. (9.46),  $F = pa^2$  es la fuerza total ejercida por el gas sobre la pared de área  $A = a^2$ , y  $p$  es la presión del gas. Se obtiene un resultado similar para las paredes  $CDGE$  y  $ADGH$ , obteniendo una contribución total al virial para las seis paredes igual a:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = -3pa^3 = -3pV,$$

donde  $V = a^3$  es el volumen ocupado por el gas. La ec. (9.56) se transforma entonces en

$$E_k = \frac{3}{2}pV - \frac{1}{2}(\sum_{ij} \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij})$$

6

$$pV = \frac{2}{3}E_k + \frac{1}{3}(\sum_{ij} \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}). \tag{9.57}$$

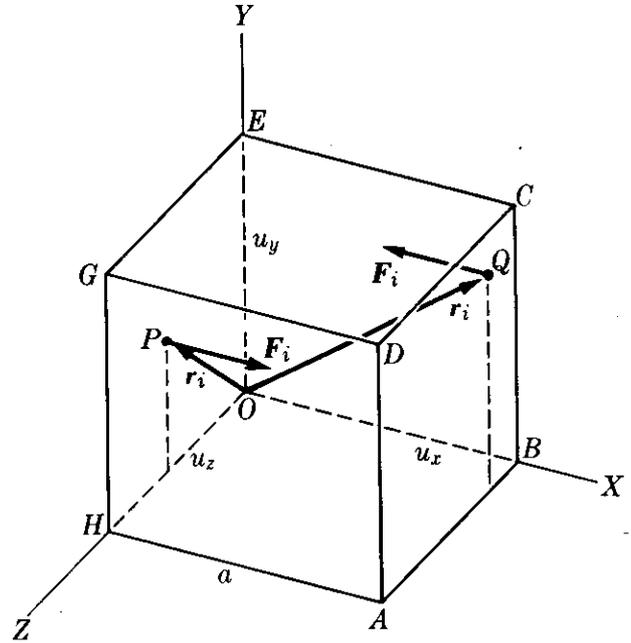


Figura 9-19

La energía cinética promedio de una molécula es  $\frac{1}{2}mv_{\text{rms}}^2$ , y la energía promedio de todas las moléculas en el gas es  $E_k = N(\frac{1}{2}mv_{\text{rms}}^2)$ , donde  $N$  es el número total de moléculas. Sustituyendo en la ec. (9.57), tenemos

$$pV = \frac{1}{3}Nmv_{\text{rms}}^2 + \frac{1}{3} \left( \sum_{\substack{\text{Todos los} \\ \text{pares}}} \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} \right), \quad (9.58)$$

que relaciona la presión  $p$  y el volumen  $V$  con propiedades moleculares tales como  $m$ ,  $v_{\text{rms}}$  y  $\mathbf{F}_{ij}$ . Definimos la *temperatura absoluta*  $T$  del gas como directamente proporcional a la energía cinética promedio de una molécula, expresándola por la relación

$$\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}mv_{\text{rms}}^2 \quad \text{ó} \quad kT = \frac{1}{3}mv_{\text{rms}}^2, \quad (9.59)$$

donde  $k$  es una constante universal llamada *constante de Boltzmann*, y cuyo valor experimental (ver nota sobre la medición de la temperatura en la pág. 279) es

$$k = 1,38045 \times 10^{-23} \text{ J } ^\circ\text{K}^{-1}. \quad (9.60)$$

Entonces la ec. (9.58) se transforma en

$$pV = NkT + \frac{1}{3} \left( \sum_{\substack{\text{Todos los} \\ \text{pares}}} \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} \right). \quad (9.61)$$

Hemos llegado a la ecuación de estado de un gas. No está aún en su forma final porque no hemos evaluado el último término, que depende de las fuerzas intermoleculares. Para evaluarlo debemos hacer alguna hipótesis sobre la naturaleza de las fuerzas intermoleculares.

Por el momento, postulemos un gas "ideal" que puede considerarse como un modelo muy simplificado. Un *gas ideal* es aquel en el que las fuerzas intermoleculares son consideradas nulas. Entonces el último término de la ec. (9.61) desaparece, y la ecuación de estado para un gas ideal es

$$pV = NkT. \quad (9.62)$$

Esta ecuación es obedecida con sorprendente buena aproximación por muchos gases, lo cual indica que las fuerzas intermoleculares son despreciables, excepto cuando las moléculas se encuentran muy próximas o la temperatura es muy baja.

La característica interesante de la ec. (9.61) es que expresa claramente el efecto de las fuerzas moleculares en la presión del gas. Por ejemplo, vemos que si las fuerzas intermoleculares son atractivas, los productos  $\mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}$  son todos negativos, de modo que el miembro derecho de la ec. (9.61) será menor que para un gas ideal, dando como resultado una presión menor, resultado que está de acuerdo con nuestra intuición física.

**EJEMPLO 9.16.** Obtener la ecuación de estado de un gas ideal computando directamente la presión ejercida por el gas sobre las paredes del recipiente.

**Solución:** El estudiante puede recordar del ejemplo 9.2 que la presión de un chorro de gas sobre el área  $A$  de la pared es

$$p = \frac{F}{A} = \frac{2Anmv^2 \cos^2 \theta}{A} = 2nmv^2 \cos^2 \theta,$$

donde  $v \cos \theta$  es la componente de la velocidad molecular a lo largo de la normal a la pared. Ello da la presión debida a las moléculas que se mueven en una dirección que hace un ángulo  $\theta$  con la normal a la pared. Por tanto en este caso  $n$  no es el número total de moléculas por unidad de volumen sino solamente el número de aquellas que se mueven en tal dirección. Por consiguiente debiéramos empezar por hallar qué fracción de moléculas se mueven en un ángulo  $\theta$  con la normal y sumar (en realidad integrar) sus contribuciones para todas las direcciones. En cambio, procederemos en una forma más simple e intuitiva que esencialmente conduce al mismo resultado.

Podemos, sin peligro, suponer que estadísticamente, en un instante particular, una mitad de las moléculas tienen una componente de su velocidad dirigida hacia la pared y la otra mitad está alejándose de la pared. Debemos entonces reemplazar  $n$  por  $\frac{1}{2}n$ , ya que solamente  $\frac{1}{2}n$  van a chocar con la pared. Por otra parte, si la pared es  $ABCD$  en la Fig. 9.19, entonces  $v \cos \theta$  es la componente  $v_x$  de la velocidad a lo largo del eje  $X$  que es normal a la pared escogida. Haciendo esos cambios en la expresión anterior para  $p$ , tenemos

$$p = 2\left(\frac{1}{2}n\right)mv_x^2.$$

La magnitud de la velocidad es  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ . En realidad debemos usar el valor promedio  $v_{x,rms}^2$  y por tanto  $v_{rms}^2 = v_{x,rms}^2 + v_{y,rms}^2 + v_{z,rms}^2$ . Pero podemos suponer que si el gas es homogéneo, las direcciones de las velocidades moleculares están distribuidas isotrópicamente: Así  $v_{x,rms}^2 = v_{y,rms}^2 = v_{z,rms}^2$  y por tanto  $v_{x,rms}^2 = \frac{1}{3}v_{rms}^2$ . Haciendo esas sustituciones en la expresión de  $p$ , tenemos

$$p = 2\left(\frac{1}{2}n\right)m\left(\frac{1}{3}v_{rms}^2\right) = \frac{1}{3}nmv_{rms}^2 = \frac{1}{3} \frac{N}{V} mv_{rms}^2,$$

ya que  $n = N/V$ , donde  $N$  es el número total de moléculas y  $V$  es el volumen. Por consiguiente

$$pV = \frac{1}{3}N mv_{rms}^2.$$

Este resultado coincide con la ec. (9.58), excepto que falta el término correspondiente a las fuerzas interiores y por tanto la ecuación corresponde a un gas ideal. La ventaja del método del virial es que muestra claramente cómo tomar en cuenta las fuerzas intermoleculares. ¿Puede imaginar el estudiante alguna forma de incorporar las fuerzas intermoleculares dentro del contexto de este ejemplo?

**Nota sobre la medición de la temperatura** En la sección 9.8 asociamos la temperatura de un sistema de partículas con la energía cinética promedio de una partícula en el sistema de referencia del centro de masa. En la ec. (9.59), que es  $\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}mv_{rms}^2$ , fuimos más específicos en lo que se refiere a la relación entre la temperatura de un gas y la energía cinética promedio de las moléculas del gas. Sin embargo, consideraremos ahora dos importantes aspectos: Primero, al definir la ec. (9.59) introdujimos dos nuevas cantidades,  $T$  (la temperatura absoluta) y  $k$  (la constante de Boltzmann), debemos decidir cómo se pueden medir independientemente. Segundo, el estudiante tiene un concepto intuitivo de la temperatura basado en la experiencia sensorial, y reflejado en sus sensaciones de caliente y frío. Está acostumbrado a medir la temperatura en términos de un número dado por un artefacto llamado *termómetro*. Por consiguiente, es necesario correlacionar nuestra definición de temperatura con esta noción intuitiva.

Consideremos una masa  $M$  de gas que contiene  $N$  moléculas. Si despreciamos el efecto de las fuerzas intermoleculares, la ecuación de estado está dada por la ec. (9.62); esto es  $pV = kNT$ . Supongamos que llevamos el gas al equilibrio térmico con algún otro sistema físico que podemos suponer se mantiene a una temperatura fija. Este sistema puede ser una mezcla de agua y hielo en su punto de congelamiento y a la presión normal de una atmósfera. Medimos la presión y el volumen del gas a esta temperatura, y obtenemos los valores  $p_0$  y  $V_0$ , respectivamente. Decidimos luego asignar un valor conveniente (pero arbitrario)  $T_0$  a la temperatura fija, la cual es también la temperatura del gas. Por consiguiente, podemos escribir  $p_0V_0 = kNT_0$ . Esto fija automáticamente el valor de la constante de Boltzmann,  $k = p_0V_0/NT_0$  donde  $N$  puede obtenerse si conocemos la masa de cada molécula.

Para determinar la temperatura del gas cuando su presión es  $p$  y su volumen es  $V$ , de modo que  $pV = kNT$ , simplemente eliminamos el factor  $kN$ , usando los valores patrón, y obtenemos

$$T = T_0(pV/p_0V_0),$$

lo que da  $T$  en términos de nuestro patrón de temperatura  $T_0$  y de otras cantidades medibles. En esta forma nuestra masa de gas se ha convertido en un *termómetro de gas*. En vez de un gas podemos usar otras sustancias como termómetros, tales como un líquido, o una varilla metálica cuyas dimensiones (volumen o longitud) cambian con la temperatura. Puesto que la ecuación de estado de esas sustancias es más complicada, en la práctica calibramos esos termómetros usando un termómetro de gas. En este caso el termómetro coincide con el termómetro de gas solamente en los puntos de calibración. Ya que la propiedad escogida puede no variar linealmente con la temperatura, pueden existir pequeñas discrepancias en las temperaturas intermedias.

Podemos escoger el valor de  $T_0$  de acuerdo con varios criterios. Por ejemplo, podemos escoger otro proceso que concebiblemente ocurra a una temperatura fija, tal como la ebullición del agua a cierta temperatura y a la presión normal de una atmósfera. Podemos entonces decidir que la temperatura de este segundo punto de referencia esté a 100 unidades o *grados* encima de  $T_0$ . Si  $p_1$  y  $V_1$  son la presión y volumen del gas a esta nueva temperatura, tendremos que  $p_1V_1 = kN(T_0 + 100)$ . Obteniendo  $kN$  de la ecuación  $p_0V_0 = kNT_0$ , y sustituyendo este valor en la ecuación anterior, encontramos que

$$T_0 = 100p_0V_0/(p_1V_1 - p_0V_0),$$

de la cual podemos obtener un valor numérico para  $T_0$ . El valor obtenido para  $T_0$  como resultado de este tipo de experimento (y muchos otros experimentos usando otras técnicas) es  $T_0 = 273,15$ . Cada una de estas unidades se llama *Kelvin*, y se designa por K.

Es importante darse cuenta que nuestra técnica para medir temperaturas está basada en la aproximación del gas ideal. Si usamos diferentes gases, los resultados obtenidos serán diferentes porque el efecto de las fuerzas intermoleculares, tal como aparece en la ec. (9.61), es diferente para cada gas. Generalmente se usa el hidrógeno o el helio. Es sumamente conveniente poder establecer una escala de temperatura independiente de la sustancia usada, asunto que es discutido en termodinámica y que no será tratado aquí.

## 9.14 *Movimiento de un fluido*

Los principios generales que hemos discutido en este capítulo para sistemas de partículas pueden ser fácilmente aplicados a la discusión del movimiento de un fluido. Consideremos, por simplicidad, un fluido (esto es, un líquido o un gas)

moviéndose a lo largo de un tubo cilíndrico de sección  $A$  (Fig. 9-20). El tubo puede estar orientado en cualquier dirección, y, por tanto, se puede tomar el eje  $X$  en coincidencia con su eje. Nos concentraremos en un elemento de volumen de espesor  $dx$  y volumen  $A dx$ . Aunque este volumen es pequeño, contiene todavía un gran número de moléculas. Podemos discutir su movimiento, usando la ec. (9.9) con la masa  $M$  reemplazada por  $\rho(A dx)$ , donde  $\rho$  es la densidad del fluido. El centro de masa puede suponerse que coincide con el centro de volumen, si el fluido es homogéneo, y  $v_{CM}$  se llama la velocidad del fluido en tal punto. En nuestro caso es paralela al eje  $X$ .

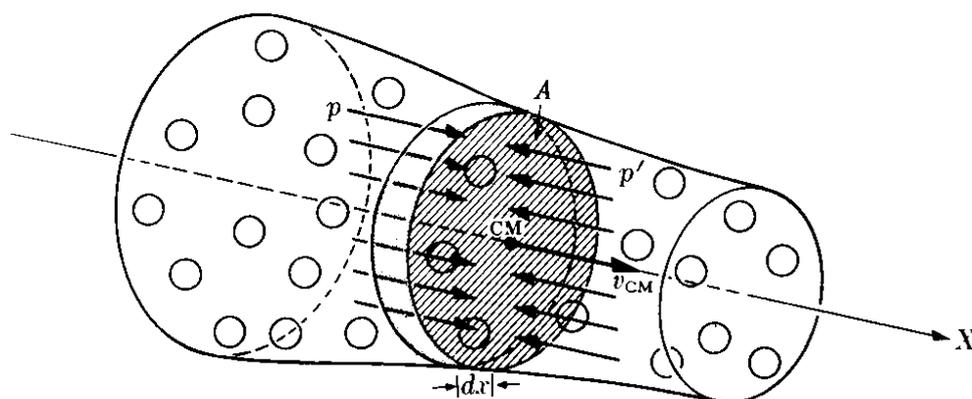


Figura 9-20

Debemos ahora determinar la fuerza exterior resultante que actúa sobre el volumen del fluido. Sean  $p$  y  $p'$  los valores de la presión a la izquierda y a la derecha del volumen. El fluido a la izquierda produce una fuerza  $pA$  sobre el elemento de volumen, dirigida hacia la derecha, y el fluido a la derecha produce una fuerza  $p'A$  dirigida hacia la izquierda. Por tanto la componente  $X$  de la fuerza exterior resultante sobre el elemento de volumen debida a la presión es

$$dF_x = -p'A + pA = -(p' - p)A.$$

Pero  $p' - p$  es la diferencia de presión entre dos puntos separados por una distancia  $dx$ ; por tanto  $p' - p = dp$ . Luego

$$dF_x = -(dp)A = -\frac{dp}{dx}(A dx).$$

Dado que  $A dx$  es el volumen, concluimos que la fuerza por unidad de volumen a lo largo del eje  $X$  debida a la presión es

$$f_p = -\frac{dp}{dx}. \quad (9.63)$$

Este resultado, al compararlo con la ec. (8.23), sugiere que podemos considerar la presión como energía por unidad de volumen. Podemos ver que esto es di-

mensionalmente correcto, ya que  $p$  se expresa en  $\text{N m}^{-2}$ , lo que es lo mismo que  $(\text{N m})\text{m}^{-3}$  o  $\text{J m}^{-3}$ .

Además de la presión puede haber otras fuerzas exteriores (tales como la gravedad o un campo eléctrico o magnético externo) actuando sobre el fluido dentro del elemento de volumen. Digamos que  $f_e$  es cualquier fuerza por unidad de volumen (por ejemplo el peso por unidad de volumen); la fuerza resultante externa sobre el fluido dentro del elemento del volumen es  $(f_p + f_e)A dx = (-dp/dx + f_e)A dx$ . (Las fuerzas entre las moléculas dentro del elemento del volumen son fuerzas internas, y no deben ser tomadas en cuenta). Por consiguiente, la ecuación del movimiento de acuerdo a la ec. (9.9) (y aquí dejamos de poner el subíndice  $\text{cm}$  en la velocidad), es

$$(\rho A dx) \frac{dv}{dt} = \left( -\frac{dp}{dx} + f_e \right) A dx$$

o, cancelando el factor común  $A dx$ , tenemos

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{dp}{dx} + f_e. \quad (9.64)$$

Si la fuerza  $f_e$  es conservativa, tenemos que  $f_e = -dE_p/dx$ , donde  $E_p$  es la energía potencial correspondiente por unidad de volumen. Entonces

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{dp}{dx} - \frac{dE_p}{dx} = -\frac{d}{dx} (p + E_p). \quad (9.65)$$

Antes de proseguir, debemos ser más específicos acerca de la naturaleza del movimiento de un fluido. El movimiento de un fluido se dice que es *estacionario* cuando la forma del movimiento no cambia con el tiempo. Esto significa que, aunque la velocidad de un elemento de fluido puede cambiar cuando el elemento de fluido cambie de posición, la velocidad del fluido en cada punto del espacio permanece la misma. Para ser más precisos, si seguimos a un elemento de fluido en particular a lo largo de su trayectoria (Fig. 9-21) podemos encontrar que cuando está en  $A$  su velocidad es  $v$  y cuando está en  $A'$  su velocidad es  $v'$ . Pero si el movimiento es estacionario, *todos* los elementos de fluido tendrán la velocidad  $v$  cuando pasen por  $A$  y la velocidad  $v'$  cuando pasen por  $A'$ . De esta forma, la velocidad del fluido puede ser considerada como una función de posición en vez de una función de tiempo. Cuando el movimiento no es estacionario, las velocidades en cada posición pueden cambiar con el tiempo. Por ejemplo, si en un cierto instante la velocidad del fluido en  $A$  es  $v$ , en un instante posterior la velocidad, en general, será diferente. En lo que sigue consideraremos solamente el movimiento estacionario.

En el caso del movimiento estacionario, si  $dt$  es el tiempo requerido por el elemento de fluido para moverse una distancia  $dx$ , podemos escribir que

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} v^2 \right).$$

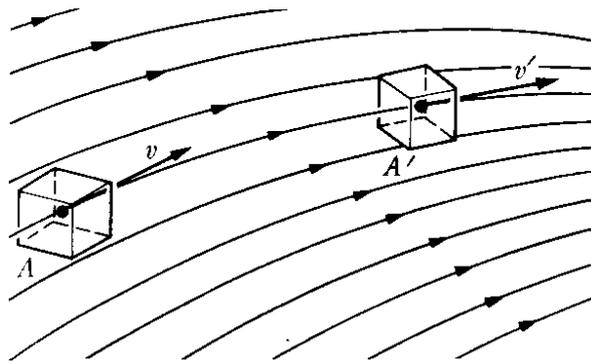


Fig. 9-21. Fluido en movimiento estacionario. Las líneas mostradas se llaman *líneas de corriente*.

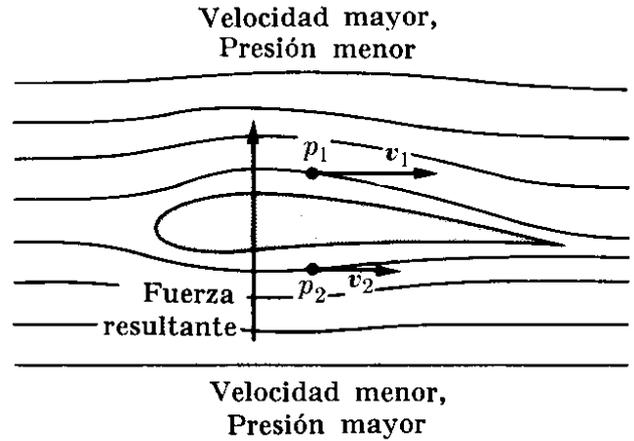


Fig. 9-22. Empuje del aire sobre el ala de un aeroplano.

Sustituyendo esto en la ec. (9.65), tenemos

$$\rho \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = - \frac{d}{dx} (p + E_p).$$

Suponemos que el fluido es incompresible (esto es, que su densidad es constante); por consiguiente el miembro izquierdo de la ecuación se transforma en  $d(\frac{1}{2}\rho v^2)/dx$ , y podemos escribir la ecuación en la forma

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + p + E_p \right) = 0$$

o sea

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + E_p = \text{const.} \tag{9.66}$$

Este resultado, conocido como el *teorema de Bernoulli*, expresa la conservación de la energía en el fluido. El primer término es la energía cinética por unidad de volumen; el segundo es interpretado como la energía potencial por unidad de volumen asociada con la presión, y el tercer término es la energía potencial por la unidad de volumen debida a todas las otras fuerzas exteriores. Por consiguiente si todas las fuerzas que actúan sobre el fluido son conservativas, y seguimos el movimiento de un pequeño volumen del fluido, encontraremos que la energía total por unidad de volumen permanece constante.

En el caso particular en que la fuerza exterior actuante es la gravedad,  $E_p = \rho g z$  y la ec. (9.66) se transforma en

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g z = \text{const.} \tag{9.67}$$

Consideremos dos casos importantes. Cuando el fluido se mueve en la dirección horizontal solamente, el término  $\rho g z$  permanece constante y la ec. (9.67) se reduce a

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p = \text{const.} \tag{9.68}$$

Así, en un tubo horizontal, a mayor velocidad, menor presión, e inversamente. Este efecto se usa para producir la elevación o empuje de un aeroplano (Fig. 9-22). El perfil del ala está diseñado de tal modo que el aire tenga mayor

velocidad encima del ala que debajo de ella, lo que produce una mayor presión por debajo. Esto produce una fuerza resultante total hacia arriba. Si  $A$  es el área del ala, la fuerza hacia arriba es  $F = A(p_1 - p_2) = \frac{1}{2}A\rho(v_2^2 - v_1^2)$  donde los subíndices 1 y 2 se refieren a las condiciones por debajo y por encima del ala. Dado que

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}(v_2 - v_1)(v_2 + v_1),$$

podemos decir, con suficiente aproximación, que  $v = \frac{1}{2}(v_2 + v_1)$  es igual a la velocidad del avión, relativa al aire. Entonces la fuerza resultante neta hacia arriba, o *empuje*, es

$$F = A\rho v(v_2 - v_1).$$

Como segundo ejemplo, consideremos un fluido en reposo o moviéndose con velocidad constante dentro de un tubo. Bajo tales circunstancias, el término  $\frac{1}{2}\rho v^2$  puede ser omitido en la ec. (9.67), la que entonces se reduce a  $p + \rho gz = \text{const.}$  Designando la constante por  $p_0$ , tendremos entonces que la presión en un fluido compresible en equilibrio está dada por

$$p = p_0 - \rho gz. \quad (9.69)$$

Obviamente,  $p_0$  es el valor de la presión en  $z = 0$ .

Nuestra discusión puede ser extendida a los casos en que el fluido es compresible o las fuerzas no son conservativas. (Esta última situación se presenta, por ejemplo, cuando el fluido hace *trabajo externo* al impulsar cierto mecanismo, tal como una turbina en una instalación hidroeléctrica, o cuando intercambia calor con los alrededores, como en una planta química industrial). Omitiremos

dichas consideraciones aquí, sin embargo, ya que ellas pertenecen a cursos más especializados.

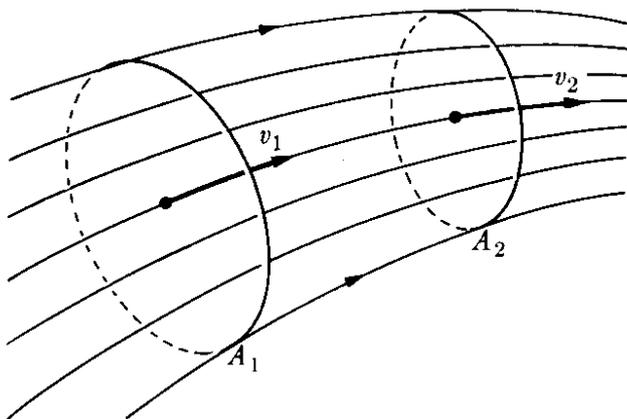


Figura 9-23

Un último principio que es muy importante para discutir el movimiento de un fluido es la *ecuación de continuidad*, que expresa la conservación de la masa del fluido. Consideremos el fluido moviéndose dentro de un tubo como se muestra en la Fig. 9-23 bajo condiciones estacionarias, de modo que no se añade ni se pierde masa en ningún punto. Sean  $A_1$  y  $A_2$  dos secciones del tubo. El volumen del fluido que pasa por  $A_1$  por unidad de tiempo corresponde a un cilindro de

base  $A_1$  y longitud  $v_1$ , con un volumen  $A_1 v_1$ , y por tanto la masa de fluido que ha pasado a través de  $A_1$  en la unidad de tiempo es  $\rho_1 A_1 v_1$ . Análogamente tenemos que  $\rho_2 A_2 v_2$  es la cantidad de fluido que pasa por  $A_2$  por unidad de tiempo. La conservación de la masa, bajo las condiciones enunciadas, requiere que ambas masas sean iguales entre sí, o sea

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2, \quad (9.70)$$

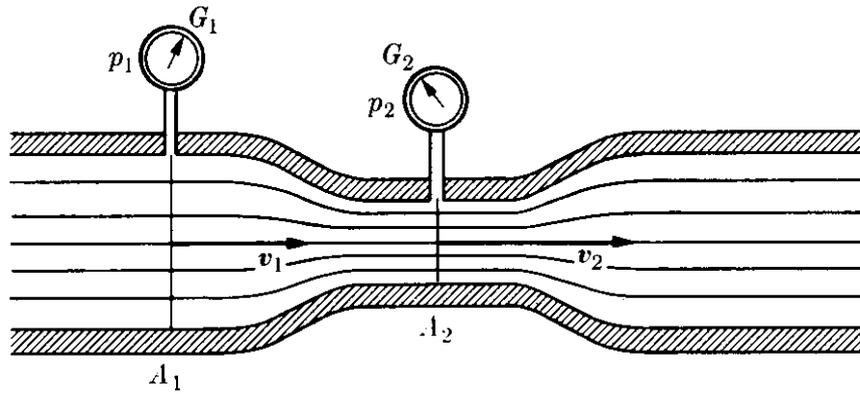


Figura 9-24

la cual se llama ecuación de continuidad. Si el fluido es incompresible, la densidad permanece la misma y la ec. (9.70) se reduce a

$$A_1 v_1 = A_2 v_2, \tag{9.71}$$

indicando que la velocidad del fluido es inversamente proporcional a la sección del tubo, resultado que está de acuerdo con nuestra intuición física.

**EJEMPLO 9.17.** Para determinar la velocidad de un fluido en un tubo se puede usar un *medidor de Venturi*, ilustrado en la Fig. 9.24. Dos medidores de presión  $G_1$  y  $G_2$  miden la presión en el tubo y en una constricción de él. Obtener la velocidad  $v_1$  en términos de la diferencia de presión  $p_1 - p_2$ .

**Solución:** Para obtener la expresión de la velocidad, notamos que si  $v_1$  y  $v_2$  son las velocidades en ambas secciones, de áreas  $A_1$  y  $A_2$ , respectivamente, la ecuación de continuidad (9.71) da  $A_1 v_1 = A_2 v_2$  ó  $v_2 = (A_1/A_2)v_1$ . Por otra parte si el tubo es horizontal, el teorema de Bernoulli en la forma de la ec. (9.68) da

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2.$$

Insertando el valor de  $v_2$  obtenido previamente y despejando  $v_1$ , obtenemos finalmente

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[(A_1/A_2)^2 - 1]}}.$$

La cantidad de fluido que pasa a través de cualquier sección del tubo por unidad de tiempo es

$$V = A_1 v_1 = A_1 A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}} = K \sqrt{p_1 - p_2},$$

donde  $K$  es una constante que depende del tubo y de la naturaleza del fluido.

### Bibliografía

1. "A Sketch for a History of the Kinetic Theory of Gases," E. Mendoza, *Physics Today*, marzo de 1961, pág. 36
2. "Development of the Kinetic Theory of Gases, V: The Equation of State," S. Brush, *Am. J. Phys.* 29, 593 (1961)

3. *Mechanics* (segunda edición), por K. Symon. Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1964, cap. 4, secs. 5-11, 8-6 a 8-9
4. *Physical Mechanics* (tercera edición), por R. B. Lindsay. Princeton, N. J. : Van Nostrand, 1963, cap. 6, secs. 11-1 a 11-5
5. *Introduction to Engineering Mechanics*, por J. Huddleston. Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1961, secs. 13-1, 19-3, 19-5, 21-1
6. *Vector Mechanics*, by D. Christie. New York : McGraw-Hill, 1964, secs. 6.6, 7.3, 7.8, 7.14, 22.1 a 22.6
7. *The Feynman Lectures on Physics*, vol. I, por R. Feynman, R. Leighton y M. Sands. Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1963, cap. 39
8. *Source Book in Physics*, por W. F. Magie. Cambridge, Mass. : Harvard University Press, 1963, pág. 73, Pascal ; pág. 196, Mayer ; pág. 212, Helmholtz ; pág. 247, Bernoulli ; pág. 255, Joule ; pág. 257, Maxwell
9. *Foundations of Modern Physical Science*, por G. Holton y D. H. D. Roller. Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1958, cap. 25
10. *Thermodynamics, the Kinetic Theory of Gases, and Statistical Mechanics* (segunda edición), por Francis W. Sears. Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1953, cap. 1

**Problemas**

9.1 Un sistema está compuesto de tres partículas con masas de 3, 2 y 5 kg. La primera partícula tiene una velocidad de  $u_y(6) \text{ m s}^{-1}$ . La segunda se mueve con una velocidad de  $8 \text{ m s}^{-1}$ . En una dirección que hace un ángulo de  $-30^\circ$  con el eje X. Hallar la velocidad de la tercera partícula de modo que el centro de masa permanezca en reposo con relación al observador.

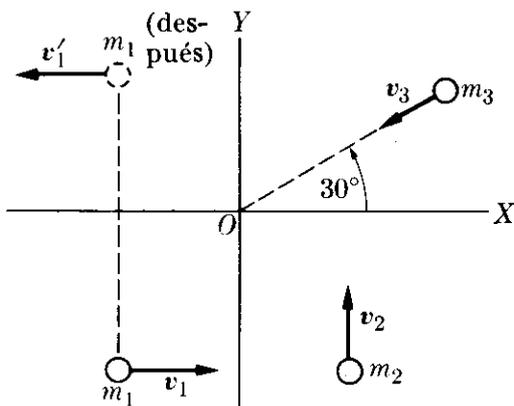


Figura 9-25

9.2 En un determinado instante, tres partículas se mueven como se muestra en la Fig. 9-25. Están sujetas únicamente a sus interacciones mutuas, de modo que no hay fuerzas exteriores. Después de un cierto tiempo, son observadas de nuevo y se encuentra que  $m_1$  se mueve en la forma que se muestra, mientras  $m_2$  está en reposo. Hallar la velocidad de  $m_3$ . Suponer que  $m_1 = 2 \text{ kg}$ ,  $m_2 =$

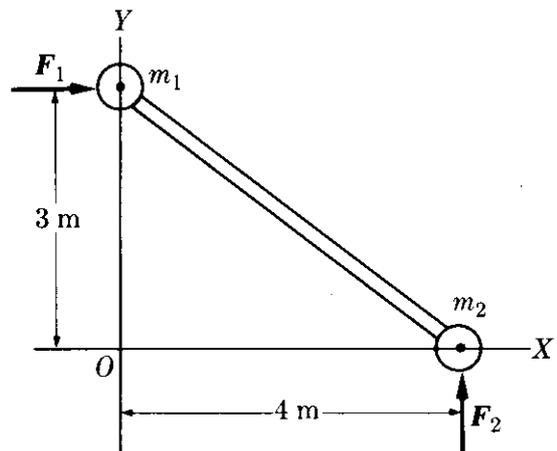


Figura 9-26

$= 0,5 \text{ kg}$ ,  $m_3 = 1 \text{ kg}$ ,  $v_1 = 1 \text{ m s}^{-1}$ ,  $v_2 = 2 \text{ m s}^{-1}$ ,  $v_3 = 4 \text{ m s}^{-1}$  y  $v'_1 = 3 \text{ m s}^{-1}$ . Hallar la velocidad del cm del sistema en los dos instantes mencionados en el problema. En cierto momento las posiciones de las masas son  $m_1(-0,8 \text{ m}, -1,1 \text{ m})$ ,  $m_2(0,8 \text{ m}, -1,1 \text{ m})$ ,  $m_3(1,4 \text{ m}, 0,8 \text{ m})$ . Dibujar una línea que muestre la trayectoria del centro de masa del sistema.

9.3 Las masas  $m_1 = 10 \text{ kg}$  y  $m_2 = 6 \text{ kg}$  están unidas por una barra rígida de masa despreciable (Fig. 9-26). Estando inicialmente en reposo, se hallan bajo la acción de las fuerzas  $F_1 = u_x(8) \text{ N}$  y  $F_2 = u_y(6) \text{ N}$ , como se muestra. (a) Hallar las coordenadas de su centro de masa como función del tiempo. (b) Expresar el momentum total como función del tiempo.

9.4 Las masas en la Fig. 9-27 están inicialmente en reposo. Suponiendo que  $m_1 > m_2$ , hallar la velocidad y aceleración de sus cm en el instante  $t$ .

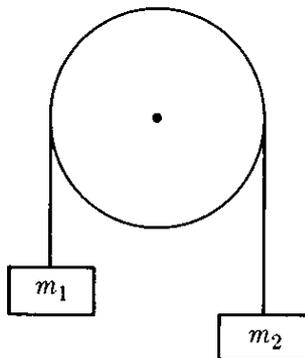


Figura 9-27

9.5 Un chorro de líquido, dirigido en un ángulo  $\theta$ , choca con una superficie plana (Fig. 9-28). El líquido, después de hacer impacto en la superficie se extiende sobre ella. Hallar la presión sobre la superficie. La densidad del líquido es  $\rho$  y su velocidad es  $v$ .

9.6 Determinar la posición del cm y la masa reducida de los siguientes sistemas: (a) tierra-luna, (b) sol-tierra. Usar los datos dados en la tabla 13-1. Encontrar también el momentum angular interno de cada sistema. Repetir el mismo problema para las moléculas CO y HCl. La longitud del enlace de la molécula CO

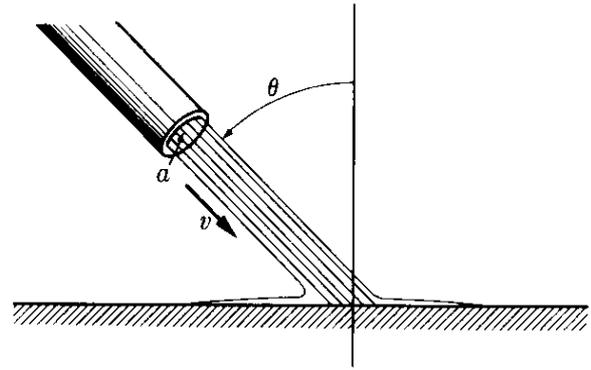


Figura 9-28

es  $1,13 \times 10^{-10} \text{ m}$  y la de la molécula HCl es  $1,27 \times 10^{-10} \text{ m}$ .

9.7 Dos partículas de masas  $2 \text{ kg}$  y  $3 \text{ kg}$  se mueven, con relación a un observador, con velocidades de  $10 \text{ m s}^{-1}$ , a lo largo del eje  $X$ , y  $8 \text{ m s}^{-1}$  en un ángulo de  $120^\circ$  con el eje  $X$ , respectivamente. (a) Expresar cada velocidad en forma vectorial. (b) Hallar la velocidad del cm. (c) Expresar la velocidad de cada partícula respecto del centro de masa. (d) Hallar el momentum de cada partícula en el sistema cm. (e) Hallar la velocidad relativa de las partículas. (f) Calcular la masa reducida del sistema. (g) Verificar las relaciones dadas en el ejemplo 9.4.

9.8 Determinar la energía cinética total de las partículas del Problema 9.7, con relación al laboratorio y con relación a su cm. Usar dos métodos diferentes para el segundo cálculo. Verificar las relaciones dadas en el ejemplo 9.8.

9.9 Suponer que las partículas del Problema 9.7 están en los puntos  $(0,1,1)$  y  $(-1,0,2)$ , respectivamente. (a) Hallar la posición del cm. (b) Determinar el momentum angular del sistema con relación a su cm. (c) Obtener el momentum angular con relación al origen. Usar métodos diferentes para (b) y (c).

9.10 Un núcleo de  $U^{238}$  en reposo se divide en dos fragmentos, con masas de  $140 \text{ amu}$  y  $90 \text{ amu}$ . La  $Q$  de la reacción es  $190 \text{ MeV}$ . Hallar las energías y velocidades de los dos fragmentos.

9.11 Un núcleo  $U^{238}$  en reposo se desintegra, emitiendo una partícula alfa ( $m = 4 \text{ amu}$ ) y dejando un núcleo resi-

dual de  $\text{Th}^{234}$  ( $M \approx 234$  amu). La energía total disponible es 4,18 MeV. Encontrar (a) la energía cinética de la partícula alfa y del núcleo residual, (b) sus momenta, y (c) sus velocidades.

9.12 Un núcleo, originalmente en reposo, se desintegra emitiendo un electrón de momentum  $9,22 \times 10^{-21}$  m kg s<sup>-1</sup> y, en ángulo recto a la dirección del electrón, un neutrino con momentum  $5,33 \times 10^{-21}$  m kg s<sup>-1</sup>. (a) En qué dirección retrocede el núcleo residual? (b) ¿Cuál es su momentum? (c) Suponiendo que la masa del núcleo residual es  $3,90 \times 10^{-25}$  kg, ¿cuáles son su velocidad y su energía cinética?

9.13 Una granada de masa  $m$  explota en varios fragmentos. La explosión tiene un valor  $Q$  positivo. (a) Demostrar que si la granada explota en dos fragmentos, ellos se mueven en direcciones opuestas en el sistema  $C$  de referencia. (b) Demostrar que si la granada explota en tres fragmentos, sus momenta y velocidades, relativos todos al sistema  $C$  de referencia, se encuentran en un solo plano. (c) Si el número de fragmentos es mayor que 3, ¿hay alguna condición especial que tenga que ser satisfecha por los momenta de los fragmentos relativos al sistema  $C$  de referencia? (d) Demostrar que si la granada se divide en dos fragmentos iguales, sus momenta y velocidades en el sistema  $C$  de referencia son iguales a  $(mQ/2)^{1/2}$  y  $(2Q/m)^{1/2}$ , respectivamente. (e) Demostrar que si la granada se divide en tres fragmentos iguales emitidos simétricamente en el sistema- $C$ , sus momenta y velocidades en este sistema son  $\frac{1}{3}(2mQ)^{1/2}$  y  $\frac{1}{3}(2Q/m)^{1/2}$ , respectivamente. (f) Repetir (e), suponiendo que dos fragmentos son emitidos con la misma velocidad relativa al sistema- $C$  pero en direcciones que hacen un ángulo de 90° entre sí. (g) ¿Cómo aprecia los resultados de (d) y (e) un observador en el sistema- $L$ , si, en el momento de la explosión la granada se está moviendo con una velocidad  $\frac{1}{3}(2Q/m)^{1/2}$  relativa al sistema- $L$ , y en la misma dirección que tomará uno de los fragmentos resultantes?

9.14 Se dispara un proyectil en un ángulo de 60° con la horizontal con una velocidad de salida de 400 m s<sup>-1</sup>. En

el punto más alto de su trayectoria explota en dos fragmentos de igual masa, uno de los cuales cae verticalmente. (a) ¿Cuán lejos del punto de disparo choca el otro fragmento con el suelo, si es que el terreno está nivelado? (b) ¿Cuál fue la energía liberada en la explosión?

9.15 Una granada de masa  $M$  está cayendo con una velocidad  $v_0$ , y se halla a una altura  $h$ , cuando explota en dos fragmentos iguales que inicialmente se mueven horizontalmente en el sistema- $C$ . La explosión tiene un valor  $Q$  igual a  $Mv_0^2$ . Determinar los puntos donde los fragmentos chocarán con el suelo con relación al punto directamente debajo de la granada en el momento de la explosión.

9.16 Repetir el Problema 9.15 para una granada que se mueve horizontalmente en el instante de la explosión.

9.17 Una bola, con masa de 4 kg y velocidad de 1,2 m s<sup>-1</sup>, choca frontalmente con otra bola de masa 5 kg moviéndose a 0,6 m s<sup>-1</sup> en la misma dirección. Encontrar (a) las velocidades después del choque (suponiendo que es elástico), (b) el cambio en el momentum de cada bola.

9.18 Repetir el problema anterior, suponiendo que la segunda bola se mueve en dirección opuesta.

9.19 Repetir los dos problemas anteriores si las dos bolas continúan moviéndose juntas.

9.20 Una partícula de masa 0,2 kg moviéndose a 0,40 m s<sup>-1</sup> choca con otra partícula de masa 0,3 kg, que está en reposo. Después del choque la primera partícula se mueve a 0,20 m s<sup>-1</sup> en una dirección que hace un ángulo de 40° con la dirección original. Hallar la velocidad de la segunda partícula y la  $Q$  del proceso.

9.21 La Fig. 9-29 ilustra un péndulo balístico. Se usa para determinar la velocidad de una bala midiendo la altura  $h$  a la que el bloque se eleva después de que la bala se ha incrustado en él. Demuestra que la velocidad de la bala está dada por

$$\sqrt{2gh} (m_1 + m_2)/m_1,$$

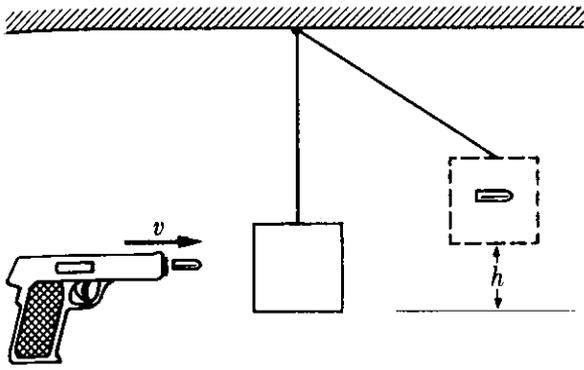


Figura 9-29

donde  $m_1$  es la masa de la bala y  $m_2$  la masa del bloque.

9.22 Una bala de masa  $m$  y velocidad  $v$  pasa a través de la esfera de un péndulo de masa  $M$  saliendo con una velocidad  $v/2$  (Fig. 9.30). La esfera pendular cuelga del extremo de la cuerda de longitud  $l$ . ¿Cuál es el menor valor de  $v$  para el cual el péndulo completará una circunferencia entera?

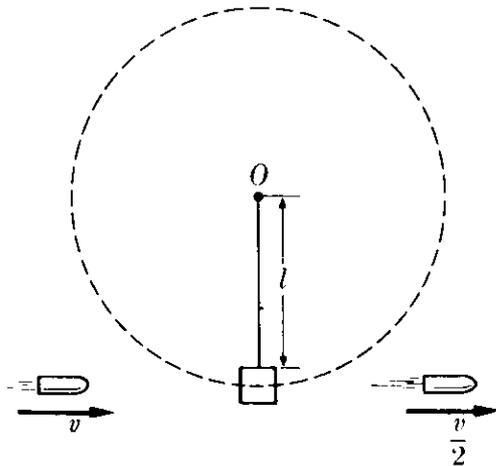


Figura 9-30

9.23 Una partícula de 5 kg de masa moviéndose a  $2 \text{ m s}^{-1}$ , choca con una partícula de 8 kg de masa inicialmente en reposo. Si el choque es elástico, hallar la velocidad de cada partícula después del choque (a) si el choque es frontal, (b) si la primera partícula se desvía  $50^\circ$  de su dirección original de movimiento. Expresar todas las direcciones en relación a la de la partícula incidente.

9.24 Una partícula de masa  $m$ , moviéndose con velocidad  $v$ , choca elástica y frontalmente con otra partícula de masa  $M$  mayor que  $m$  teniendo (a) un momento igual pero opuesto, (b) la misma energía cinética, pero moviéndose en la dirección opuesta. Computar en cada caso la velocidad de la primera partícula después de la colisión. (c) Demostrar que si  $M$  está en reposo y es mucho mayor que  $m$ , el cambio en la energía cinética de  $m$  es

$$\Delta E_k/E_k \approx -4(m/M).$$

9.25 Se ha encontrado experimentalmente que una colisión frontal (o central) de dos esferas sólidas, tales como dos bolas de billar, las velocidades después del choque están relacionadas con las velocidades antes del choque por la expresión  $v'_1 - v'_2 = -e(v_1 - v_2)$  donde  $e$  es el coeficiente de restitución y tiene un valor entre cero y uno. Esta relación fue propuesta por Newton y tiene validez solamente aproximada. Aparte de todo ello, se conserva el momentum en el choque. Probar lo siguiente: (a) las velocidades después del choque están dadas por

$$v'_1 = \frac{v_1(m_1 - m_2e) + v_2m_2(1 + e)}{m_1 + m_2}$$

y

$$v'_2 = \frac{v_1m_1(1 + e) + v_2(m_2 - m_1e)}{m_1 + m_2}.$$

(b) La  $Q$  de la colisión es

$$-\frac{1}{2}(1 - e^2) \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2.$$

(c) ¿Cuál debería ser el valor de  $e$  para que la colisión fuera elástica?

9.26 En una *colisión plástica* los dos cuerpos se mueven juntos después del choque. (a) ¿Cuál es el valor del coeficiente de restitución  $e$ ? (b) Computar la  $Q$  de la reacción directamente, y también mediante el resultado del Problema 9.25 con el valor apropiado de  $e$ .

9.27 Si las masas de las bolas  $m_1$  y  $m_2$  en la Fig. 9-31 son 0,1 kg y 0,2 kg, respectivamente, y si  $m_1$  es soltada cuando  $d = 0,2 \text{ m}$ , hallar las alturas a las que regresarán después de chocar si la colisión es elástica.

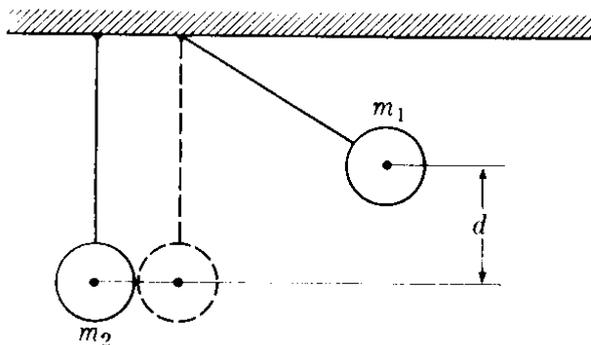


Figura 9-31

La colisión es (a) elástica, (b) inelástica con un coeficiente de restitución  $= 0,9$ , (c) plástica ( $e = 0$ ). Resolver el problema también para el caso en que la masa  $m_2$  es elevada y soltada contra la masa estacionaria  $m_1$ .

9.28 Discutir los resultados físicos de un choque en que el valor de  $e$  es (a) negativo, (b) mayor que uno. ¿Concluye Ud. entonces que esos valores de  $e$  son permitidos para un choque entre dos esferas sólidas?

9.29 Suponiendo que el segundo cuerpo en el Problema 9.25 está en reposo y que su masa es muy grande comparada con la del primero, hallar la velocidad de cada cuerpo después de la colisión, y también encontrar el valor de  $Q$ . Aplicar este resultado a la determinación de la altura del rebote, para un cuerpo soltado desde una altura  $h$  sobre el suelo. Efectúe el experimento por sí mismo y estime el correspondiente valor de  $e$ .

9.30 Probar que el tiempo necesario para que la bola del Problema 9.29 termine de rebotar es  $t = \sqrt{2h/g} (1 + e)/(1 - e)$ .

9.31 Demostrar que si la bola del Problema 9.29 choca con el suelo bajo un ángulo  $\alpha$  con la vertical, rebota en un ángulo  $\beta$ , dado por  $\text{tg } \beta = (1/e) \text{tg } \alpha$ , con una velocidad  $v' = v \sqrt{e^2 \cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha}$ . Usar dicho resultado para discutir el movimiento de una bola soltada desde una mesa con una velocidad horizontal inicial  $v_0$ . Bosquejar la trayectoria, suponiendo que rebota varias veces en el suelo.

9.32 Probar directamente que si la energía y el momentum se conservan en

un choque elástico, entonces

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2) = -\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2),$$

donde  $\mathbf{u}$  es un vector unitario en la dirección en la cual el momentum de una de las partículas ha cambiado. Este resultado significa que en la colisión la componente de la velocidad relativa a lo largo de la dirección del intercambio de momentum ha cambiado de sentido. Aplicar esto al caso de una colisión frontal. Comparar con los resultados de Problema 9.25 tomando  $e = 1$ . *Sugerencia:* Escribir las leyes de conservación, poniendo todos los términos correspondientes a cada partícula en un lado de cada ecuación.

9.33 Un neutrón, con energía de 1 MeV se mueve a través de (a) deuterio y (b) carbón. Estimar para cada material el número de colisiones frontales requeridas para reducir la energía del neutrón a un valor termal de aproximadamente 0,025 eV. La probabilidad relativa de captura del neutrón por parte de esos materiales es 1 : 10. ¿En cuál de estos materiales hay mayor probabilidad de que el neutrón sea capturado antes de ser frenado?

9.34 Probar que en una colisión de una partícula de masa  $m_1$ , moviéndose con velocidad  $v_1$  en el sistema- $L$ , con una partícula de masa  $m_2$  en reposo en el sistema- $L$ , los ángulos bajo los cuales la primera partícula se mueve después de la colisión con relación a su velocidad inicial están dados por  $\text{tg } \theta = \text{sen } \phi / (\cos \phi + 1/A)$ , donde  $A = m_2/m_1$  y los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  se refieren a los sistemas  $L$  y  $C$ , respectivamente.

9.35 Verificar, para las partículas del problema anterior, que si  $m_1 = m_2$  entonces  $\theta = \frac{1}{2} \phi$ . ¿Cuál es el máximo valor de  $\theta$ ?

9.36 Refiriéndose al Problema 9.34, demostrar que el valor máximo de  $\theta$  para  $A$  arbitraria está dado por  $\text{tg } \theta = A/\sqrt{1 - A^2}$ . Discutir la situación cuando  $A$  es mayor que uno y cuando es menor que uno.

9.37 Al analizar la deflexión de partículas alfa que se mueven a través del hidrógeno, los físicos han encontrado experimentalmente que la máxima de-

flección de una partícula alfa en el sistema- $L$  vale alrededor de  $16^\circ$ . Usando los resultados del Problema 9.36, estimar la masa de la partícula alfa relativa a la del hidrógeno. Comprobar su respuesta con los valores experimentales obtenidos por medio de otras técnicas.

9.38 Probar que si la energía cinética interna de un sistema de dos partículas es  $E_{k,CM}$ , las magnitudes de las velocidades de las partículas relativas al CM son:

$$v_1 = [2m_2 E_{k,CM} / m_1(m_1 + m_2)]^{1/2}$$

y

$$v_2 = [2m_1 E_{k,CM} / m_2(m_1 + m_2)]^{1/2}.$$

9.39 Para las dos partículas en la Fig. 9-32, sabemos que  $m_1 = 4 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 6 \text{ kg}$ ,  $v_1 = u_x(2) \text{ m s}^{-1}$  y  $v_2 = u_y(3) \text{ m s}^{-1}$ . (a) Determinar el momento angular total del sistema relativo a  $O$  y relativo al CM y verificar la relación entre ambos valores. (b) Determinar la energía cinética total relativa a  $O$  y relativa al CM y verificar la relación entre ambas.

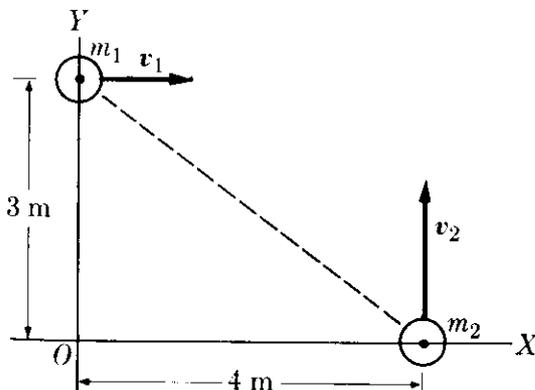


Figura 9-32

9.40 Suponer que las partículas del problema anterior están unidas por un resorte elástico, de constante  $2 \times 10^{-3} \text{ N m}^{-1}$ , inicialmente sin estirar. (a) ¿Cómo afectará esto al movimiento del CM del sistema? (b) ¿Cuál es la energía interna total del sistema? ¿Permanecerá constante? (c) En cierto instante, el resorte está comprimido en 4 cm. Hallar las energías internas cinética y potencial de las partículas. (d) Determinar las magnitudes de las velocidades relativas

al CM (¿puede Ud. también determinar sus direcciones?). Asimismo determinar (e) la magnitud de su velocidad relativa, (f) el momento angular del sistema con relación a  $O$  y con relación a CM.

9.41 Dos masas conectadas por una varilla ligera, como se muestra en la Fig. 9-33, están en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción. Una tercera partícula de masa  $0,5 \text{ kg}$  se aproxima al sistema con velocidad  $v_0$  y choca con la masa de  $2 \text{ kg}$ . ¿Cuál es el movimiento resultante del CM de las dos partículas si la masa de  $0,5 \text{ kg}$  rebota con una velocidad  $v_f$  tal como se muestra?

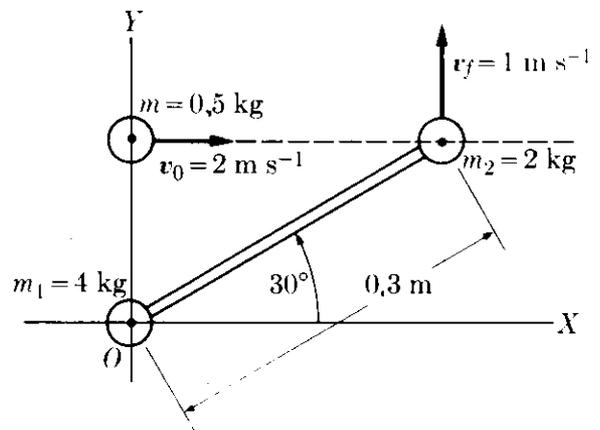


Figura 9-33

9.42 La energía potencial debida a la interacción entre un protón y un átomo de deuterio es  $E_{p,int} = 2.3 \times 10^{-28}/r \text{ J}$ , donde  $r$  es la separación entre los dos, expresada en metros. En un instante particular, un protón de energía  $0,5 \text{ MeV}$  está a  $2 \times 10^{-12} \text{ m}$  de un átomo de deuterio en reposo, referidos todos al sistema- $L$ . (a) Hallar la energía cinética del sistema en los sistemas de referencia  $L$  y  $C$ , así como la energía potencial interna ( $m_{\text{proton}} = 1,0076 \text{ amu}$ ,  $m_{\text{deuteron}} = 2,0147 \text{ amu}$ ). (b) Después de un cierto tiempo el protón está a  $10^{-13} \text{ m}$  del átomo de deuterio. Hallar la energía cinética del sistema en los sistemas  $L$  y  $C$ , así como su energía potencial. (c) Hallar la magnitud de la velocidad del CM en ambos casos.

9.43 Designando la tierra, la luna, y el sol, con subíndices  $T$ ,  $L$ , y  $S$ , respectivamente, escribir en extenso la ec. (9.34) para sistemas que consisten de (a) la

tierra y la luna, (b) la tierra, la luna y el sol.

9.44 Se mantiene un gas a presión de 20 atm, mientras que se expande de un volumen de  $5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  a otro de  $9 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ . ¿Qué cantidad de energía en forma de calor debe ser proporcionada (a) para mantener su energía interna constante? (b) para aumentar su energía interna en una cantidad igual a la del trabajo externo hecho. Expresar sus resultados en calorías y en joules.

9.45 Un gas se expande de tal modo que en cada momento la relación entre su presión y su volumen es  $pV^\gamma = C$ , donde  $\gamma$  es una constante apropiada. Demostrar que el trabajo efectuado al expandirse del volumen  $V_1$  al volumen  $V_2$  es

$$W = (p_1 V_1 - p_2 V_2) / (\gamma - 1).$$

9.46 Recordamos (Problema 2.8) que un mol de una sustancia es una cantidad (expresada en *gramos*) igual a su masa molecular (o atómica) expresada en amu. En un mol de cualquier sustancia hay siempre el mismo número de moléculas, llamado *número de Avogadro*, dado por  $N_A = 6,0225 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ . Demostrar que si  $N$  es el número de moles, la ec. (9.62) puede ser escrita en la forma

$$pV = nRT,$$

donde  $R = kN_A$ , es llamada la *constante de los gases*. Demostrar que  $R = 8,3143 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ .

9.47 Demostrar que el resultado del Problema 9.46 también puede ser escrito bajo la forma  $p = \rho(RT/M)$ , donde  $\rho$  es la densidad del gas y  $M$  es la masa molecular (expresada en kg).

9.48 Hallar el volumen de un mol de cualquier gas en condiciones normales; esto es, a temperatura de  $0^\circ \text{C}$  y presión de una atmósfera. Demostrar también que el número de moléculas de cualquier gas por centímetro cúbico en condiciones normales es  $2,687 \times 10^{19}$ . Este es el *número de Loschmidt*.

9.49. ¿Cuál es la energía cinética promedio de una molécula de gas a la temperatura de  $25^\circ \text{C}$ ? Expresarla en joules y en eV. ¿Cuál es la velocidad media cuadrática correspondiente si el gas es

(a) hidrógeno, (b) oxígeno, (c) nitrógeno? Notar que las moléculas de dichos gases son diatómicas. Hacer lo mismo para el helio (monoatómico) y el dióxido de carbono.

9.50 Hallar la energía interna de un mol de un gas ideal a  $0^\circ \text{C}$  (273 K). ¿Depende ella de la naturaleza del gas? ¿Por qué?

9.51 Hallar el cambio en la energía interna de un mol de un gas ideal cuando su temperatura cambia de  $0^\circ \text{C}$  a  $100^\circ \text{C}$ . ¿Tenemos también que especificar cómo cambian la presión y el volumen?

9.52 El proceso mencionado en el problema anterior tiene lugar a volumen constante. (a) ¿Cuál es el trabajo hecho por el gas? (b) ¿Cuál es el calor absorbido?

9.53 Repetir el problema anterior si es que el proceso mencionado en el Problema 9.51 ocurre a presión constante?

9.54 Identificar la constante  $C$  que aparece en la ec. (9.51) para el trabajo de expansión de un gas a temperatura constante. (a) Computar el trabajo hecho por el mol de un gas ideal al duplicar su volumen a temperatura constante igual a  $0^\circ \text{C}$ . (b) Computar el cambio en la energía interna y el calor absorbido.

9.55 Demostrar que si la energía potencial para la interacción entre dos partículas es  $E_p = -Cr_{12}^{-n}$ , entonces  $r_{12} \cdot \mathbf{m}_{12} = nE_p$ . (Sugerencia: Escoger la partícula 1 como origen de coordenadas, y recordar la sección 8.13).

9.56 Usar el resultado del problema anterior para reescribir el teorema del virial, ec. (9.56), en la forma

$$\overline{E_k} = -\frac{1}{2}[\overline{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i} + nE_p],$$

donde  $E_p$  corresponde a la energía potencial *interna* del sistema. Notar que si el sistema está aislado (esto es, no actuando ninguna fuerza externa) entonces  $\overline{E_k} = -\frac{1}{2}nE_p$ . Comparar este último resultado con la ec. (8.49).

9.57 Suponer que las fuerzas gravitatorias son atractivas y siguen la ley del inverso del cuadrado de la distancia (capítulo 13) de modo que la energía potencial total es negativa y que  $n = 1$ . Usando el resultado del Problema 9.56,

probar (a) que la energía total de un sistema aislado es negativa, (b) que si el sistema pierde energía (usualmente por radiación), la energía potencial debe disminuir, (c) que esto requiere que la energía cinética del sistema aumente, dando como resultado correspondiente un aumento de la temperatura del sistema. (Estos resultados son de gran importancia en astrofísica.)

9.58 Discutir la aplicación del teorema del virial a un sistema en el que las fuerzas internas son repulsivas. Suponer que la energía potencial entre dos partículas es  $E_p = +Cr_{12}^{-n}$ .

9.59 Un cuerpo cuya masa es 10 kg y que tiene una velocidad de  $3 \text{ m s}^{-1}$  resbala sobre una superficie horizontal hasta que la fricción lo detiene. Determine la cantidad de energía convertida en movimiento molecular interno en el cuerpo y en la superficie. Expresarla en joules y en calorías. ¿Podría Ud. decir que esta energía ha sido transformada en calor?

9.60 Las masas de los bloques A y B en la Fig. 9-34 son  $m_1$  y  $m_2$ . Entre A y B hay una fuerza de fricción de magnitud  $F$ , pero B puede resbalar sin fricción sobre la superficie horizontal. Inicialmente A se mueve con velocidad  $v_0$  mientras que B está en reposo. Si no actúa ninguna fuerza sobre el sistema, A se irá parando y B aumentará su velocidad hasta que los dos bloques se muevan con la misma velocidad  $v$ . (a) ¿Cuáles son las distancias recorridas por A y B antes de que ello suceda, medidas con relación a la superficie horizontal? (b) ¿Cuál es el cambio en la energía cinética del sistema, en términos de la distancia recorrida por A con relación a B? (c) ¿Qué ha pasado con el momento total?

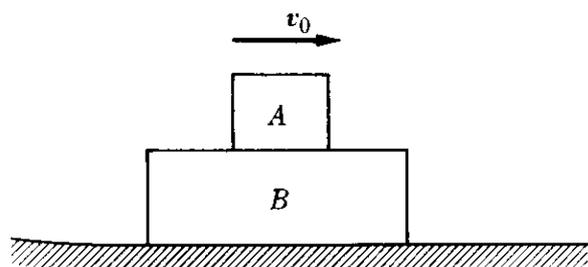


Figura 9-34

9.61 Un tubo horizontal tiene una sección transversal de  $10 \text{ cm}^2$  en una región y de  $5 \text{ cm}^2$  en otra. La velocidad del agua en la primera es  $5 \text{ m s}^{-1}$  y la presión en la segunda es  $2 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$ . Encontrar (a) la velocidad del agua en la segunda región y la presión del agua en la primera, (b) la cantidad de agua que cruza cualquier sección por minuto, (c) la energía total por kilogramo de agua.

9.62 Repetir el problema anterior para el caso en que el tubo esté inclinado y la segunda sección esté 2 m por encima de la primera.

9.63 Verificar que la ecuación del movimiento de un fluido en forma vectorial es  $\rho \, dv/dt = -\text{grad } p + f$ .

9.64 Demostrar que si hay un orificio en la pared de un recipiente y que si la superficie del líquido dentro del recipiente está a una altura  $h$  sobre el orificio, la velocidad del líquido que sale por él es  $v = \sqrt{2gh}$ . Considerar un recipiente cilíndrico con un diámetro de 0,10 m y una altura de 0,20 m. Hay un orificio de  $1 \text{ cm}^2$  de sección en su base. El recipiente se llena de agua a una velocidad de  $1,4 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ . (a) Determinar hasta qué altura sube el nivel del agua en el recipiente. (b) Después de haber alcanzado aquella altura se detiene el flujo de agua al recipiente. Hallar el tiempo necesario para que el recipiente se vacíe.

9.65 Usando la ecuación del movimiento derivada en el Problema 9.63, demostrar, para un fluido compresible, que el teorema de Bernoulli adopta la forma  $(\frac{1}{2}v_2^2 + gz_2) - (\frac{1}{2}v_1^2 + gz_1) + \int_1^2 dp/\rho = W$ , donde  $W$  es el trabajo por unidad de masa hecho sobre el fluido por otras fuerzas fuera de la gravitación. [Sugerencia: Separar la fuerza externa por unidad de volumen  $f_{\text{ext}}$  en el peso  $-\rho g u_z$  y cualquier otra fuerza que actúe sobre el fluido, y entonces dividir la ecuación resultante por  $\rho$  y multiplicarla escalarmente por  $v \, dt = dr$ , notando que  $(\text{grad } p) \cdot dr = dp$ .]

9.66 Un cilindro de altura  $h$  y sección  $A$  flota verticalmente en un fluido de densidad  $\rho_f$ . La presión del fluido está dada por  $p = p_0 - \rho_f g z$ , de acuerdo a la ec. (9.69). Demostrar que la fuerza total

hacia arriba sobre el cilindro debida a la presión del fluido es  $V\rho fg$ , donde  $V$  es el volumen del cilindro. Extender este resultado a un cuerpo de forma arbitraria dividiéndolo en pequeños cilindros verticales. (Este resultado constituye el principio de Arquímedes, y la fuerza es conocida con el nombre de *empuje de flotación*.)

9.67 Partiendo de la ec. (9.62), demostrar que si la temperatura de un gas ideal es constante, entonces  $pV = \text{const}$  ó  $p_1V_1 = p_2V_2$ , resultado conocido como la *ley de Boyle*. Demostrar también que si la presión es constante, entonces  $V/T = \text{const}$  ó  $V_1/T_1 = V_2/T_2$ , resultado conocido como la *ley de Charles*. Finalmente, demostrar que si el volumen es constante entonces  $p/T = \text{const}$  o  $p_1/T_1 = p_2/T_2$ , resultado conocido como la *ley de Gay-Lussac*. Dichas leyes fueron encontradas experimentalmente mucho antes de ser sintetizadas en la ec. (9.62).

9.68 Considerar un sistema compuesto de  $N$  partículas idénticas, cada una de masa  $m$  (tal como ocurre en un gas). Demostrar que la energía cinética de una partícula relativa a un observador que ve moverse el centro de masa con una velocidad  $v_{CM}$  es igual a la energía cinética media de las partículas en relación al sistema- $C$  de referencia más  $\frac{1}{2}mv_{CM}^2$ . [Sugerencia: Usar la relación dada por la ec. (9.38)].

9.69 La presión de un gas está relacionada con su densidad por medio de la ecuación  $p = \rho(RT/M)$ , donde  $M$  es la masa molecular en la escala atómica (ver el Problema 9.47). (a) Usando el resultado de la sección 9.13, demostrar que si un gas está en equilibrio, su presión debe cambiar con la altura de acuerdo con

$$p = p_0 e^{-(Mg/RT)z}.$$

Esta se llama a veces la *ecuación barométrica*, y puede ser usada para estimar la variación de la presión atmosférica con

la altura. (b) Demostrar que para pequeñas alturas dicha ecuación toma el valor dado al final de la sección 9.14 para un fluido incompresible.

9.70 Una bomba explota en tres fragmentos de igual masa  $m$ . La explosión libera una energía  $Q$ . En este caso las leyes de conservación de energía y momentum no determinan únicamente la energía y momentum de cada fragmento. Refiriéndonos al proceso en el sistema- $C$ , demostrar que (a) las energías cinéticas de los fragmentos pueden ser representadas por las distancias desde un punto  $P$  a los lados de un triángulo equilátero de altura  $Q$ . (b) Demostrar también que la ley de conservación del momentum requiere que el punto  $P$  esté dentro del círculo (con radio  $\frac{1}{3}Q$ ) inscrito en el triángulo. Esta representación se llama el *diagrama de Dalitz* (Fig. 9-35) y es muy

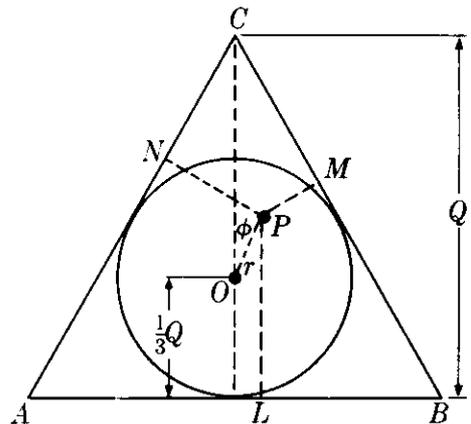


Figura 9-35

usada para analizar la desintegración de una partícula fundamental en tres fragmentos iguales. [Sugerencia: para la prueba de (b), notar que en el sistema- $C$  el momentum total es 0, y que por tanto  $p_1 + p_2 \geq p_3$ . Las tres energías pueden ser también expresadas como  $E_{k,1} = PN = \frac{1}{3}Q + r \cos(\phi - 2\pi/3)$ ,  $E_{k,2} = PM = \frac{1}{3}Q + r \cos(\phi + 2\pi/3)$  y  $E_{k,3} = PL = \frac{1}{3}Q + r \cos \phi$ .]