8
TRABAJO Y ENERGIA

8.1 Introducción

En este capítulo continuaremos discutiendo diversos aspectos de la dinámica de una partícula. Por tanto, nos limitaremos a la observación de una sola partícula, reduciendo sus interacciones con el resto del universo a un solo término que hemos ya llamado *fuerza*. Al resolver la ecuación fundamental de la dinámica de una partícula (esto es, $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$), podemos siempre realizar una primera integración si conocemos la fuerza en función del tiempo, ya que de esta ecuación obtenemos por integración

$$\int_{\boldsymbol{p}_0}^{\boldsymbol{p}} d\boldsymbol{p} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F}\, dt$$

o sea

$$\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0 = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F}\, dt = \boldsymbol{I}. \tag{8.1}$$

La magnitud $\boldsymbol{I} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F}\, dt$ que aparece a la derecha se llama *impulso*. Por consiguiente la ec. (8.1) nos dice que

el cambio de momentum de una partícula es igual al impulso.

Ya que el impulso consiste esencialmente del producto de la fuerza por el tiempo, una fuerza muy fuerte que actúe por un tiempo muy corto puede causar un cambio de momentum comparable al de una fuerza débil, que actúe por un tiempo largo. Por ejemplo, un "bateador" que golpea la pelota, aplica una fuerza grande durante un corto tiempo, cambiando apreciablemente el momentum de la pelota. Por su parte, la fuerza de gravedad, para producir el mismo cambio de momentum, tendría que actuar sobre la pelota por un tiempo mucho mayor.

Al reemplazar $\boldsymbol{p}$ por $m\boldsymbol{v}$, es posible integrar nuevamente y obtener la posición de la partícula en función del tiempo. Esto es,

$$m\boldsymbol{v} - m\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{I} \qquad \text{o} \qquad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \frac{1}{m}\boldsymbol{I}.$$

Recordando que $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$, podemos escribir

$$\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{r} = \int_{t_0}^{t} \left(\boldsymbol{v}_0 + \frac{1}{m}\right) dt \qquad \text{o} \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{I}\, dt,$$

lo que da $\boldsymbol{r}$ en términos de t, y resuelve así formalmente el problema dinámico. Por cierto, en el ejemplo 7.5 resolvimos un problema de este tipo para el caso del movimiento rectilíneo.

Sin embargo, en los problemas importantes que surgen en la física, la fuerza sobre una partícula no se conoce como función del tiempo, sino como función de la posición especificada por $\boldsymbol{r}$ o x, y, z; es decir, como $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ o $\boldsymbol{F}(x, y, z)$. Por tanto, no podemos evaluar la integral de la ec. (8.1) hasta conocer x, y, z en función del tiempo; vale decir, hasta haber resuelto precisamente el problema que estamos por resolver con la ec. (8.1). Para salir de este aparente círculo vicioso debemos recurrir a otras técnicas matemáticas que nos conducirán a definir dos nuevos conceptos: *trabajo* y *energía*. Estos métodos nos permitirán resolver problemas aún en los casos en que desconozcamos la fuerza, pero podamos formular suposiciones razonables sobre sus propiedades.

EJEMPLO 8.1. Una bola de masa 0,1 kg es soltada desde una altura de 2 m y, después de chocar con el suelo, rebota hasta 1,8 m de altura. Determinar el impulso debido a la gravedad al caer la bola y el impulso recibido al chocar con el suelo.

Solución: Usamos, en primer lugar, la ec. (5.12) para determinar la velocidad de la bola al llegar al suelo ; esto es, $v_1 = \sqrt{2gh_1}$, siendo $h_1 = 2\text{m}$. Así $v_1 = 6{,}26$ m s^{-1}. Ya que el sentido de la velocidad es hacia abajo, debemos escribir $\boldsymbol{v}_1 = -\boldsymbol{u}_y(6{,}26$ m s$^{-1})$. El momentum inicial es cero, y por tanto el cambio total de momentum durante la caída es $m\boldsymbol{v}_1 - 0 = -\boldsymbol{u}_y(0{,}626$ kg m s$^{-1})$. Este es el impulso debido a la gravedad. También podemos computarlo directamente usando la definición $\boldsymbol{I} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F}\, dt$. En este caso $t_0 = 0$ y $t = v_1/g = 0{,}639$ s. Asimismo $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{u}_y mg = -\boldsymbol{u}_y(0{,}98$ N). De modo que el cálculo directo vuelve a dar $-\boldsymbol{u}_y$ (0,626 kg m s^{-1}) para el impulso debido a la gravedad durante la caída.

Pero al chocar la bola con el suelo una nueva fuerza actúa por un tiempo muy breve. Desconocemos la fuerza, pero podemos obtener el impulso computando el momentum de la bola al rebotar. Ya que alcanza una altura de $h_2 = 1{,}8$ m, la velocidad con que rebota es $v_2 = \sqrt{2gh_2} = 5.94$ m s^{-1}, o, en forma vectorial, $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_y$ (5,94 m s^{-1}), puesto que el cuerpo se mueve hacia arriba. Por tanto el cambio de momentum es

$$\boldsymbol{p}^2 - \boldsymbol{p}^1 = m\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_y(1.221 \text{ kg m s}^{-1}),$$

lo que también expresa el impulso. Comparando este valor con el obtenido para la caída, y notando que el choque con el suelo tiene lugar en un intervalo brevísimo, podemos concluir que la fuerza en el segundo caso es mucho mayor. Si pudiéramos medir dicho intervalo, podríamos obtener la fuerza promedio sobre la bola.

8.2 Trabajo

Consideremos una partícula A que se mueve a lo largo de una curva C bajo la acción de una fuerza $\boldsymbol{F}$ (Fig. 8-1). En un tiempo muy corto dt la partícula se mueve de A a A', siendo el desplazamiento $\overrightarrow{AA'} = d\boldsymbol{r}$. El *trabajo* efectuado por la fuerza $\boldsymbol{F}$ durante tal desplazamiento se define por el producto escalar

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}. \tag{8.2}$$

Designando la magnitud del desplazamiento $d\boldsymbol{r}$ (esto es, la distancia recorrida) por ds, podemos también escribir la ec. (8.2) en la forma

$$dW = F\, ds \cos\theta, \tag{8.3}$$

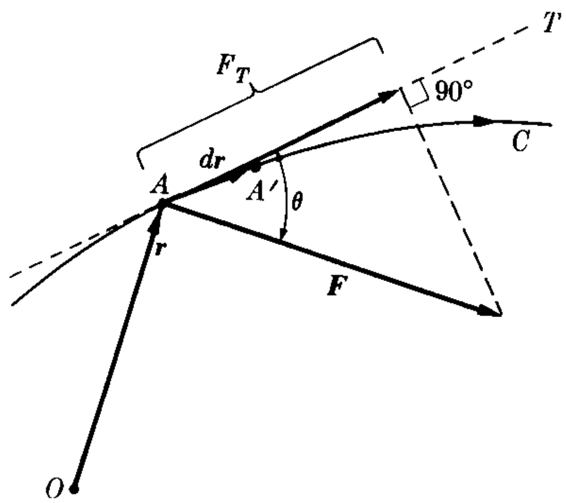

Fig. 8-1. El trabajo es igual al desplazamiento multiplicado por el componente de la fuerza a lo largo del desplazamiento.

donde θ es el ángulo entre la dirección de la fuerza $\boldsymbol{F}$ y el desplazamiento $d\boldsymbol{r}$. Pero $F \cos \theta$ es la componente F_T de la fuerza a lo largo de la tangente a la trayectoria, de modo que

$$dW = F_T \, ds. \tag{8.4}$$

Verbalmente podemos expresar este resultado diciendo que

> *el trabajo es igual al producto del desplazamiento por la componente de la fuerza a lo largo del desplazamiento.*

Notemos que si la fuerza es perpendicular al desplazamiento ($\theta = 90°$), el trabajo efectuado por la fuerza es cero. Por ejemplo, esto sucede en el caso de la fuerza centrípeta $\boldsymbol{F}_N$ en el movimiento circular (Fig. 8-2a), o en el de la fuerza de gravedad $m\boldsymbol{g}$ cuando un cuerpo se mueve sobre un plano horizontal (Fig. 8-2b).

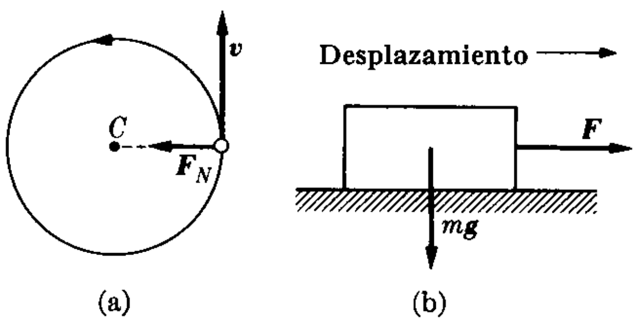

Fig. 8-2. Fuerzas que efectúan trabajo nulo.

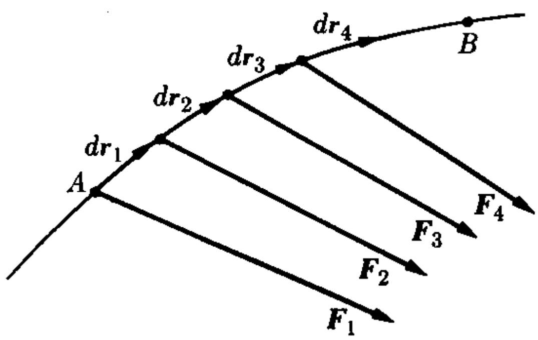

Fig. 8-3. El trabajo total es la suma de muchos trabajos infinitesimales.

La ec. (8.2) da el trabajo para un desplazamiento infinitesimal. El trabajo total sobre la partícula cuando ésta se mueve de A a B (Fig. 8-3) es la suma de todos los trabajos infinitesimales efectuados en los sucesivos desplazamientos infinitesimales. Esto es,

$$W = \boldsymbol{F}_1 \cdot d\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{F}_2 \cdot d\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{F}_3 \cdot d\boldsymbol{r}_3 + \ldots$$

o sea

$$W = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B F_T \, ds. \tag{8.5*}$$

Antes de poder efectuar la integral que aparece en la ec. (8.5), debemos conocer $\boldsymbol{F}$ en función de x, y, z. De igual manera debemos en general conocer la ecuación de la trayectoria seguida por la partícula. Alternativamente, deberíamos conocer $\boldsymbol{F}$, x, y, y z en función del tiempo o de otra variable.

A veces es conveniente representar F_T gráficamente. En la Fig. 8-4 hemos representado F_T en función de la distancia s. El trabajo $dW = F_T ds$ efectuado

---

* Si el vector $\boldsymbol{V}$ es cualquier función de posición, una integral de la forma $\int_A^B \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r}$ sobre una trayectoria de A a B se llama una *integral de línea* de $\boldsymbol{V}$. La encontraremos a menudo en este libro.

durante un pequeño desplazamiento ds corresponde al área del rectángulo alargado. Podemos así hallar el trabajo total efectuado en la partícula de la Fig. 8-3 para moverla de A a B dividiendo primero la totalidad del área sombreada en rectángulos alargados y sumando entonces sus áreas. Esto es, el trabajo efectuado está dado por el área sombreada total de la Fig. 8-4.

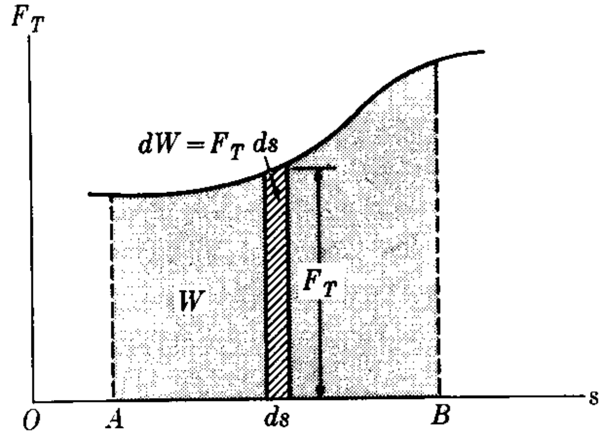

Fig. 8-4. El trabajo total efectuado yendo de A a B es igual al área total debajo de la curva.

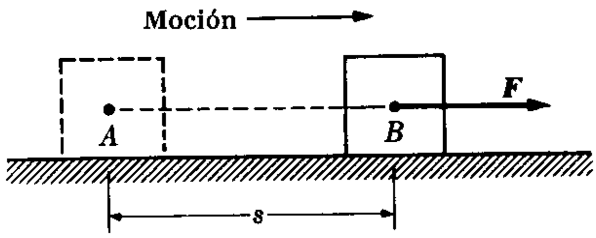

Fig. 8-5. El trabajo de una fuerza que es constante en magnitud y dirección.

Cuando la fuerza es constante en magnitud y dirección y el cuerpo se mueve rectilíneamente en la dirección de la fuerza (Fig. 8-5), se tiene un caso particular interesante. Entonces $F_T = F$ y la ec. (8.5) da

$$W = \int_A^B F\,ds = F\int_A^B ds = Fs, \tag{8.6}$$

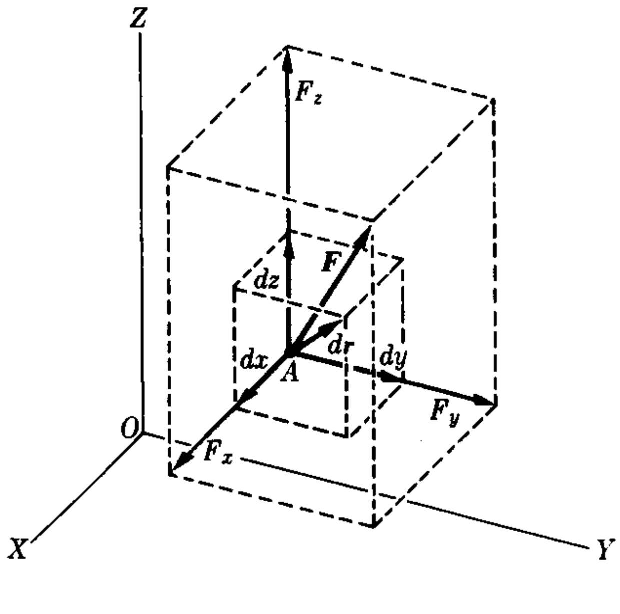

Fig. 8-6. El trabajo hecho por una fuerza es igual a la suma de los trabajos hechos por sus componentes rectangulares.

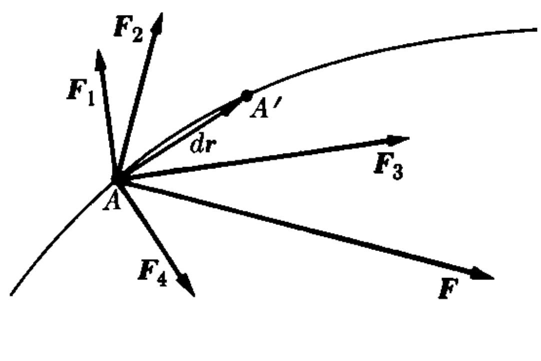

Fig. 8-7. Cuando varias fuerzas actúan en una partícula, el trabajo de la resultante es la suma de los trabajos efectuados por las componentes.

o sea trabajo = fuerza × distancia, que es la expresión encontrada normalmente en textos elementales.

Si F_x, F_y y F_z son las componentes rectangulares de $\boldsymbol{F}$ y dx, dy y dz las de $d\boldsymbol{r}$ (Fig. 8-6), podemos escribir mediante el uso de la ec. (3.2)

$$W = \int_A^B (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz). \tag{8.7}$$

Cuando sobre la partícula actúan varias fuerzas $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$, ..., los trabajos efectuados por cada una de ellas en un desplazamiento $\overrightarrow{AA'} = d\boldsymbol{r}$ (Fig. 8-7) son $dW_1 = \boldsymbol{F}_1\cdot d\boldsymbol{r}$, $dW_2 = \boldsymbol{F}_2\cdot d\boldsymbol{r}$, $dW_3 = \boldsymbol{F}_3\cdot d\boldsymbol{r}$, etc. Adviértase que $d\boldsymbol{r}$ es el mismo para todas las fuerzas ya que todas actúan sobre la misma partícula. El trabajo total dW hecho sobre la partícula se obtiene sumando los trabajos infinitesimales dW_1, dW_2, dW_3, ..., efectuados por cada una de las fuerzas. Así

$$\begin{aligned} dW &= dW_1 + dW_2 + dW_3 + \dots \\ &= \boldsymbol{F}_1\cdot d\boldsymbol{r} + \boldsymbol{F}_2\cdot d\boldsymbol{r} + \boldsymbol{F}_3\cdot d\boldsymbol{r} + \dots \\ &= (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \dots)\cdot d\boldsymbol{r} \\ &= \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}, \end{aligned} \tag{8.8}$$

donde $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \dots$ es la fuerza resultante. Como el último resultado de la ec. (8.8) expresa el trabajo efectuado por esta resultante sobre la partícula, se ha probado entonces que el trabajo de la resultante de varias fuerzas aplicadas a la misma partícula es igual a la suma de los trabajos de las fuerzas componentes.

8.3 *Potencia*

En las aplicaciones prácticas, especialmente las de ingeniería y mecanismos, es importante conocer la rapidez del trabajo efectuado. Se define la *potencia instantánea* por

$$P = \frac{dW}{dt}. \tag{8.9}$$

Esto es, se define la potencia como el trabajo efectuado por unidad de tiempo durante un intervalo dt muy pequeño. Usando las ecs. (8.2) y (5.17), podemos también escribir

$$P = \boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}, \tag{8.10}$$

y así la potencia puede definirse también por el producto de la fuerza por la velocidad. La *potencia promedio* durante un intervalo t es obtenida dividiendo el trabajo total W, dado por la ec. (8.5), entre el tiempo t, lo que da $\overline{P} = W/t$.

Desde el punto de vista de la ingeniería, el concepto de potencia es muy importante, pues cuando un ingeniero diseña una máquina, es la *rapidez* con que puede efectuar el trabajo lo que importa, más bien que la cantidad total de trabajo que la máquina pueda realizar.

8.4 Unidades de trabajo y potencia

Las ecs. (8.2) y (8.6) nos muestran que el trabajo debe ser expresado en términos del producto de la unidad de fuerza por la unidad de distancia. En el sistema MKSC, el trabajo se expresa en newton metro, unidad que se llama *joule* y se abrevia J. Por tanto un joule es el trabajo efectuado por una fuerza de un newton actuando sobre una partícula que se mueve un metro en la dirección de dicha fuerza. Recordando que $N = m\ kg\ s^{-2}$, tenemos $J = N\ m = m^2\ kg\ s^{-2}$. El nombre joule fue escogido en honor de James Prescott Joule (1816-1869), científico británico, famoso por sus investigaciones sobre los conceptos de calor y energía.

En el sistema cgs, el trabajo se expresa en dina centímetro, unidad que se llama *erg*. Así: erg = din cm. Recordando que $1\ N = 10^5$ din y $1\ m = 10^2$ cm, tenemos $1\ J = (10^5\ din)\ (10^2\ m) = 10^7$ ergs. En cuanto a la unidad de trabajo en el sistema inglés y que se llama *pie-libra*, y abrevia pie-lb, referimos al lector al problema 8.4.

Según la definición (8.9), la potencia debe ser expresada en términos del cociente de la unidad de trabajo entre la unidad de tiempo. En el sistema MKSC la potencia se expresa en *joule por segundo*, unidad que se llama *watt* y se abrevia W. Un watt es la potencia de una máquina que efectúa trabajo con la rapidez de un joule por segundo. Recordando que $J = m^2\ kg\ s^{-2}$, tenemos que $W = J\ s^{-1} = m^2\ kg\ s^{-3}$. El nombre watt fue escogido en honor del ingeniero británico James Watt (1736-1819), quien mejoró la máquina de vapor con sus inventos. Hay dos múltiplos del watt que se usan con generalidad: el *kilowatt* (kW) y el *megawatt* (MW) y que se definen por: $1kW = 10^3$ W y $1\ MW = 10^6$ W. Los ingenieros usan comúnmente una unidad de potencia llamada *caballo vapor*, que se abrevia hp, y se define como igual a 550 pie lb por segundo, o sea 746 W.

Otra unidad para expresar el trabajo es el *kilowatt-hora*, el cual es igual al trabajo efectuado durante una hora por una máquina cuya potencia es de un kilowatt. Esto es: 1 kilowatt-hora $= (10^3\ W)\ (3,6 \times 10^3\ s) = 3,6 \times 10^6$ J.

EJEMPLO 8.2. Un automóvil cuya masa es de 1200 kg sube por una colina de 5° de inclinación con velocidad constante de 36 km por hora. Calcular el trabajo efectuado por el motor en 5 minutos y la potencia desarrollada por él.

Solución: El movimiento del automóvil a lo largo de la subida se debe a la fuerza F desarrollada por el motor y a la fuerza W sen α, debida al peso del automóvil (Fig. 8-8) Debemos por tanto escribir, usando $W = mg$,

$$F - mg \operatorname{sen} \alpha = ma.$$

Ya que el movimiento es uniforme, $a = 0$, y $F = mg \operatorname{sen} \alpha = 1.023 \times 10^3$ N. La velocidad del automóvil es $v = 36\ km\ hr^{-1} = 36(10^3\ m)\ (3,6 \times 10^3\ s)^{-1} = 10\ m\ s^{-1}$, y en 5 minutos (o 300 s) recorre la distancia $s = (10\ ms^{-1})\ (300\ s) = 3 \times 10^3$ m. Luego, si usamos la ec. (8.6), el trabajo efectuado por el motor es

$$W = Fs = (1{,}023 \times 10^3\ N)\,(3 \times 10^3\ m) = 3{,}069 \times 10^6\ J.$$

La potencia promedio puede computarse de dos maneras diferentes. Primero podemos afirmar que

$$P = \frac{W}{t} = \frac{3{,}069 \times 10^6\ J}{3 \times 10^2\ s} = 1{,}023 \times 10^4\ W.$$

Alternativamente, podemos decir que

$$P = Fv = (1{,}023 \times 10^3\ N)\,(10\ m\ s^{-1}) = 1{,}023 \times 10^4\ W.$$

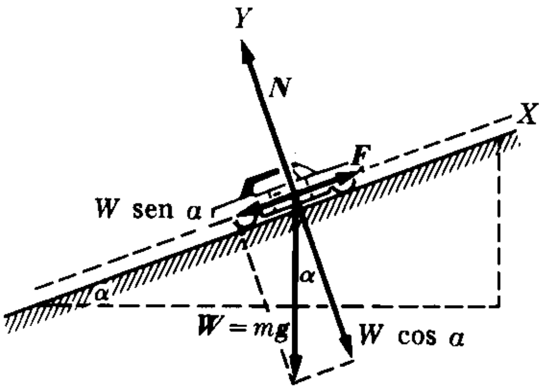

Figura 8-8

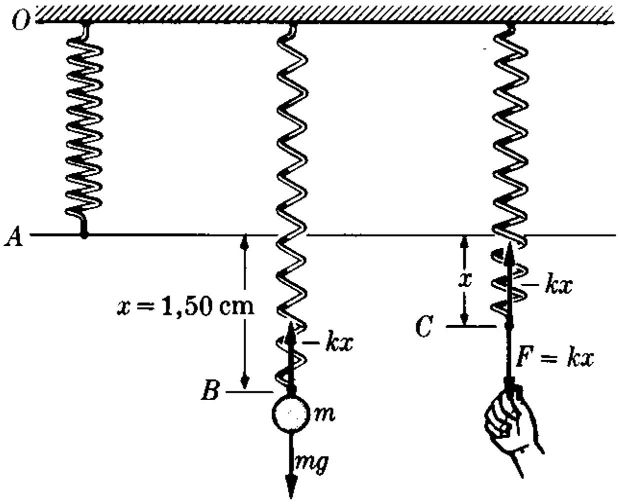

Fig. 8-9. Trabajo efectuado al extender un resorte.

EJEMPLO 8.3. Calcular el trabajo necesario para extender el resorte de la Fig. 8-9 en una distancia de 2 cm sin aceleración. Se sabe que el colgar del resolte un cuerpo de 4 kg de masa, la longitud del resorte aumenta en 1,50 cm.

Solución: Cuando ningún cuerpo cuelga del resorte, la longitud de éste se extiende desde O hasta el nivel horizontal A. Se ha verificado experimentalmente que para extender un resorte una pequeña distancia x sin aceleración, se necesita una fuerza proporcional a la distancia: $F = kx$. Si el resorte es extendido sin aceleración, él reacciona con una fuerza igual y opuesta. Este es el principio del resorte o *dinanómetro*, comúnmente usado para medir fuerzas. Para determinar la constante de proporcionalidad k, aprovechamos el hecho de que cuando el cuerpo de masa m ejerce la fuerza de su peso sobre el resorte, éste se estira la distancia $x = 1{,}50$ cm $= 1{,}50 \times 10^{-2}$ m. La fuerza F es, en este caso, el peso $mg = 39{,}2$ N. Luego, haciendo $mg = kx$, obtenemos

$$k = \frac{39{,}2\ N}{1{,}50 \times 10^{-2}\ m} = 2{,}61 \times 10^3\ N\ m^{-1}.$$

Para extender el resorte una distancia x, sin aceleración, aplicamos ahora una fuerza $F = kx$. Lo podemos hacer halando lentamente una cuerda atada al resorte. La fuerza crece constantemente al aumentar x. Para hallar el trabajo efectuado, debemos usar la ec. (8.5), la que da

$$W = \int_0^x F\,dx = \int_0^x kx\,dx = \tfrac{1}{2}kx^2.$$

Este es el trabajo efectuado para cualquier desplazamiento x. Reemplazando los correspondientes valores numéricos de x y k, obtenemos el trabajo necesario para extender el resorte en 2 cm, que es $W = 5{,}22 \times 10^{-1}$ J.

EJEMPLO 8.4. Una fuerza $F = 6t$ N actúa sobre una partícula de 2 kg de masa. Si la partícula parte del reposo, hallar el trabajo efectuado por la fuerza durante los primeros 2 s.

Solución: En el ejemplo anterior fue fácil calcular el trabajo porque conocíamos la fuerza como función de la posición ($F = kx$). Pero en este ejemplo conocemos la fuerza solamente como función del tiempo ($F = 6t$). Por ello no podemos calcular directamente el trabajo usando $W = \int F\,dx$. En cambio debemos hallar el desplazamiento en términos del tiempo, usando la ecuación del movimiento, $F = ma$. Esto es, $a = F/m = 3t$ m s^{-2}. Usando la ec. (5.6), con $v_0 = 0$, podemos escribir, ya que la partícula parte del reposo

$$v = \int_0^t (3t)\,dt = 1{,}5t^2 \text{ m s}^{-1}.$$

Si usamos ahora la ec. (5.3) con $x_0 = 0$, y si tomamos nuestro origen de coordenadas en el punto inicial, obtenemos

$$x = \int_0^t (1{,}5t^2)\,dt = 0{,}5t^3 \text{ m}.$$

Teniendo ahora x en función del tiempo, podemos proseguir de dos maneras diferentes.

(a) Buscando t, encontramos $t = (x/0{,}5)^{1/3} = 1{,}260x^{1/3}$, y la fuerza en términos de la posición es entonces $F = 6t = 7{,}560x^{1/3}$ N. Utilizando la ec. (8.5), tenemos entonces

$$W = \int_0^x (7{,}560x^{1/3})\,dx = 5{,}670x^{4/3}.$$

Cuando $t = 2$, tenemos $x = 0{,}5(2)^3 = 4$ m, y por tanto $W = 36{,}0$ J.

(b) También podemos proceder de otra manera: De $x = 0{,}5t^3$, deducimos $dx = 1{,}5t^2\,dt$. Luego, usando para la fuerza su expresión en términos del tiempo, $F = 6t$, escribimos

$$W = \int_0^t (6t)\,(1{,}5t^2\,dt) = 2{,}25t^4 \text{ J},$$

y si hacemos $t = 2$ s, obtendremos $W = 36{,}0$ J, en concordancia con el resultado anterior.

Este segundo método es el que debemos usar cuando conozcamos la fuerza en función del tiempo, ya que aún después de resolver la ecuación del movimiento puede ser difícil expresar, en general, la fuerza como función de posición.

8.5 Energía cinética

De la ec. (7.27) se deduce que la fuerza tangencial es $F_T = m\,dv/dt$. Por tanto

$$F_T\,ds = m\frac{dv}{dt}\,ds = m\,dv\,\frac{ds}{dt} = mv\,dv,$$

ya que $v = ds/dt$, según la ec. (5.23). Por consiguiente la integral que aparece en la ec. (8.5) representando el trabajo total es

$$W = \int_A^B F_T\, ds = \int_A^B mv\, dv = \tfrac{1}{2}mv_B^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2, \tag{8.11}$$

donde v_B es la velocidad de la partícula en B y v_A la velocidad de la partícula en A. El resultado (8.11) indica que cualquiera que sea la forma funcional de la fuerza $\boldsymbol{F}$ y la trayectoria seguida por la partícula, el valor del trabajo W efectuado por la fuerza es siempre igual a la diferencia entre las magnitudes de $\frac{1}{2}mv^2$ evaluadas al final y al comienzo de la trayectoria. Esta importante magnitud, llamada *energía cinética*, se designa por E_k. Por consiguiente

$$E_k = \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad \text{o} \qquad E_k = \frac{p^2}{2m}, \tag{8.12}$$

pues $p = mv$. La ec. (8.11) puede expresarse entonces en la forma

$$W = E_{k,B} - E_{k,A}, \tag{8.13}$$

que en palabras puede traducirse así:

> *el trabajo efectuado sobre una partícula es igual al cambio producido en su energía cinética,*

y que es un resultado de validez general, cualquiera que sea la naturaleza de la fuerza.

Podemos ver que, en virtud de la ec. (8.13), la energía cinética se mide obviamente con las mismas unidades que el trabajo; vale decir, en joules en el sistema MKSC y en ergs en el sistema *cgs*. Esto también puede verificarse notando en la ec. (8.12) que E_k en el sistema MKSC puede expresarse en m^2 kg s^{-2}, que es la expresión dimensional para los joules en términos de las unidades fundamentales.

Mencionemos de paso la existencia de otra unidad muy usada por los físicos para describir procesos químicos y nucleares: el *electrón volt*, que se abrevia eV, y cuya definición precisa será dada en la sección 14.9 (Vol. II). Su equivalente es: eV $= 1{,}60210 \times 10^{-19}$ J. Un múltiplo muy útil del electrón volt es el MeV, igual a 10^6 eV o $1{,}60210 \times 10^{-13}$ J.

El resultado (8.13), que relaciona el cambio de la energía cinética E_k de una partícula con el trabajo W efectuado por la fuerza, se parece mucho a la ec. (8.1), que relaciona el cambio en el momentum $\boldsymbol{p}$ de una partícula con el impulso $\boldsymbol{I}$ de la fuerza. La diferencia consiste en que el impulso, siendo una integral de *tiempo*, es útil solamente si conocemos la fuerza en función del tiempo. Pero el trabajo, siendo una integral de *espacio*, puede computarse fácilmente si conocemos la fuerza en función de la distancia. Generalmente se conoce la fuerza en función de la posición, y es por esta razón que los conceptos de trabajo y energía juegan un papel tan importante en la física.

Recordemos al estudiante que los conceptos de trabajo y energía, tal como se usan en física, tienen significados muy precisos y no deben ser confundidos con los mismos términos tal como son usados corrientemente en la vida diaria.

EJEMPLO 8.5. Usando los datos del ejemplo 8.4, computar directamente la energía cinética que gana la partícula en un tiempo t.

Solución: Recordando la solución del ejemplo 8.4, la velocidad al cabo del tiempo t es: $v = 1{,}5t^2$ m s^{-1}, y por tanto la energía cinética de la partícula es:

$$E_k = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(2 \text{ kg})\,(1{,}5t^2 \text{ m s}^{-1})^2 = 2{,}25t^4 \text{ J}.$$

La energía cinética inicial de la partícula, cuando $t = 0$, es cero, y por tanto el aumento de energía cinética en el intervalo t es $E_k - E_{k,0} = 2{,}25t^4$ J, que es precisamente igual al trabajo W efectuado sobre la partícula, de acuerdo al segundo resultado del ejemplo 8.4.

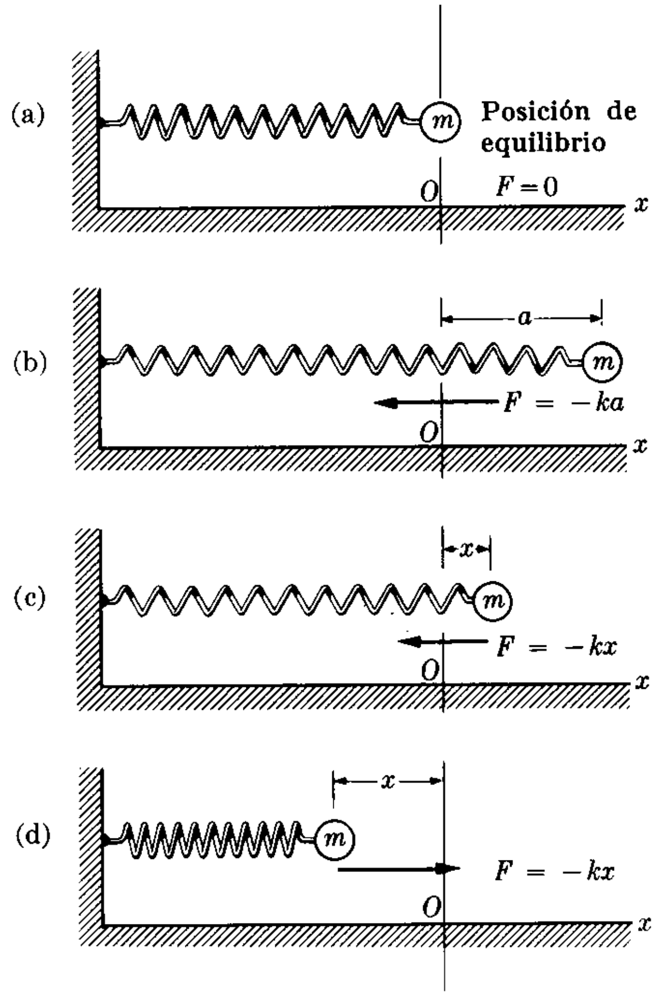

Figura 8-10

EJEMPLO 8.6. El resorte del ejemplo 8.3 está situado horizontalmente, como lo muestra la Fig. 8-10. Se mueve la masa m a la derecha una distancia a y entonces se la suelta. Calcular la energía cinética cuando se encuentra a una distancia x de la posición de equilibrio.

Solución: De acuerdo a nuestra explicación en el ejemplo 8.3, el resorte ejercerá una fuerza $F = -kx$ sobre la masa m cuando esté a la distancia x de la posición de equilibrio. (El signo menos indica que la fuerza del resorte apunta a la izquierda cuando el cuerpo se encuentra desplazado a la derecha). En la posición de equilibrio, $x = 0$, y por tanto $F = 0$. En la posición (b), cuando la masa está por ser soltada, $x = a$, $F = -ka$ y la velocidad es cero ($v_0 = 0$), siendo por tanto nulo el valor inicial de la energía cinética. Sea v la velocidad en la posición intermedia x. Luego, utilizando la ec. (8.11), encontramos que

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \int_a^x F\,dx = \int_a^x (-kx)\,dx = \tfrac{1}{2}k(a^2 - x^2)$$

o sea

$$v = \sqrt{(k/m)\,(a^2 - x^2)},$$

lo que nos da la velocidad de la partícula en términos de la posición. Nótese que la velocidad depende del cuadrado de x. ¿Cuál es el significado físico de esta dependencia? ¿Con qué velocidad llega la partícula a la posición $x = 0$? Debemos anteponer un signo $\pm$ a la raíz cuadrada en la expresión de v? ¿Hay limitación alguna en los valores de x? ¿Puede el estudiante llegar a una representación intuitiva del movimiento resultante?

8.6 Trabajo de una fuerza de magnitud y dirección constantes

Considérese una partícula de masa m que se mueve bajo la acción de una fuerza $\boldsymbol{F}$ constante en magnitud y dirección (Fig. 8-11). Puede haber otras fuerzas que también actúen sobre la partícula y que sean o no constantes, pero no deseamos considerarlas por ahora. El trabajo de $\boldsymbol{F}$ cuando la partícula se mueve de A a B a lo largo de la trayectoria (1) es

$$W = \int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}\cdot\int_A^B d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A). \tag{8.14}$$

De la ec. (8.14) puede derivarse la importante conclusión de que el trabajo en este caso es independiente de la trayectoria que conecte a A y B. Por ejemplo, si la partícula en vez de moverse a lo largo del camino (1), se mueve a lo largo del camino (2), que también va de A a B, el trabajo será el mismo, ya que la diferencia vectorial $\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A = \overrightarrow{AB}$ es siempre la misma. Nótese que la ec. (8.14) puede también escribirse en la forma

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}_A, \tag{8.15}$$

y que W es por tanto igual a la diferencia de los valores de $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}$ en los extremos del camino.

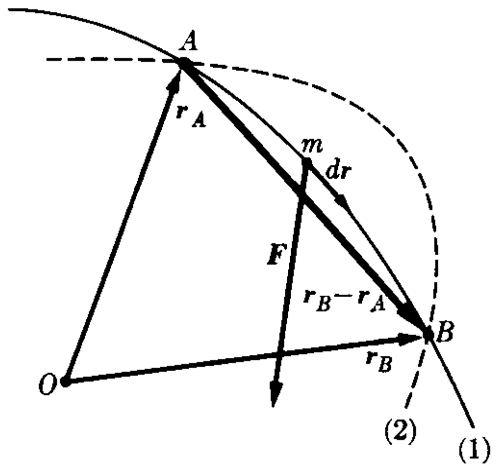

Fig. 8-11. Trabajo de una fuerza de magnitud y dirección constantes.

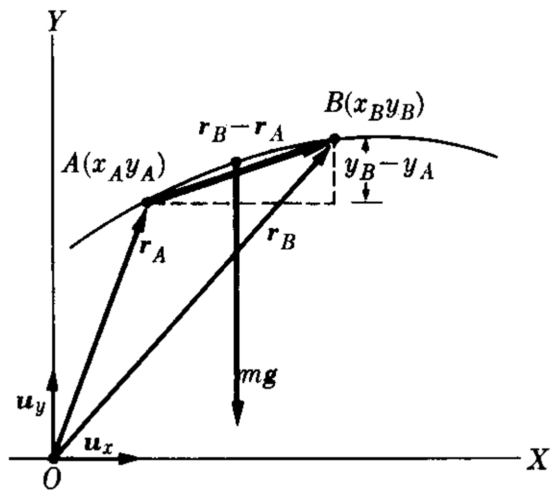

Fig. 8-12. Trabajo de la gravedad.

El trabajo de la fuerza de gravedad constituye una importante aplicación de la ec. (8.14). En este caso $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{u}_y mg$ y $\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{u}_x(x_B - x_A) + \boldsymbol{u}_y(y_B - y_A)$. Por consiguiente, sustituyendo en la ec. (8.14) y utilizando la ec. (3.19) para el producto escalar, tenemos

$$W = -mg(y_B - y_A) = mgy_A - mgy_B. \tag{8.16}$$

Obviamente, no hay referencia a la trayectoria en esta ec. (8.16), y el trabajo depende solamente de la diferencia $y_B - y_A$ entre las alturas de los extremos.

EJEMPLO 8.7. Una masa de 2 kg colgada de un hilo de 1 m de longitud, es desplazada en 30° de la vertical y entonces soltada. Hallar su velocidad cuando la cuerda forma un ángulo de 10° con la vertical tanto en el mismo lado como en el opuesto.

Solución: Una masa colgada de un hilo constituye un *péndulo*. Cuando el hilo es desplazado hasta hacer un ángulo θ_0 con la vertical (Fig. 8-13) y soltado luego, la velocidad inicial de la masa es cero. Bajo la acción de su peso mg y la tracción F_N del hilo, la masa describe un arco de círculo para llegar al punto A. Al pasarlo, sigue moviéndose a la izquierda hasta alcanzar una posición simétrica a la inicial. A partir de aquí, el movimiento se repite de lado a lado, resultando las bien conocidas oscilaciones de un péndulo. (El movimiento oscilatorio será discutido detalladamente en el capítulo 12).

Para obtener v usando el principio de la energía, ec. (8.11) deberíamos computar primero el trabajo de las fuerzas que actúan sobre la partícula. La fuerza centrípeta F_N no efectúa ningún trabajo, porque en todo momento es perpendicular a la velocidad. El trabajo de la fuerza de gravedad mg puede ser computado con ayuda de la ec. (8.16); esto es, $W = mgy_0 - mgy = mg(y_0 - y)$. Midiendo la altura a partir de un nivel horizontal arbitrario, obtenemos $y_0 - y = B'C' = OC' - OB'$. Pero $OB' = l\cos\theta_0$ y $OC' = l\cos\theta$. Luego $y_0 - y = l(\cos\theta - \cos\theta_0)$

$$W = mg(y_0 - y) = mgl(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

La energía cinética en la posición C es $E_k = \frac{1}{2}mv^2$, y en B es cero. Por tanto, usando la ec. (8.13), obtenemos

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mgl(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

o sea

$$v = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)}.$$

Notamos que el resultado es independiente de la masa. Introduciendo valores numéricos, obtenemos

$$v = \sqrt{2(9{,}8\ \mathrm{m\,s^{-2}})(1\ \mathrm{m})(\cos 10^\circ - \cos 30^\circ)} = 1{,}526\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Obsérvese que en la posición simétrica D, para la cual el ángulo es de -10° con la vertical, obtenemos el mismo resultado ya que $\cos(-\theta) = \cos\theta$.

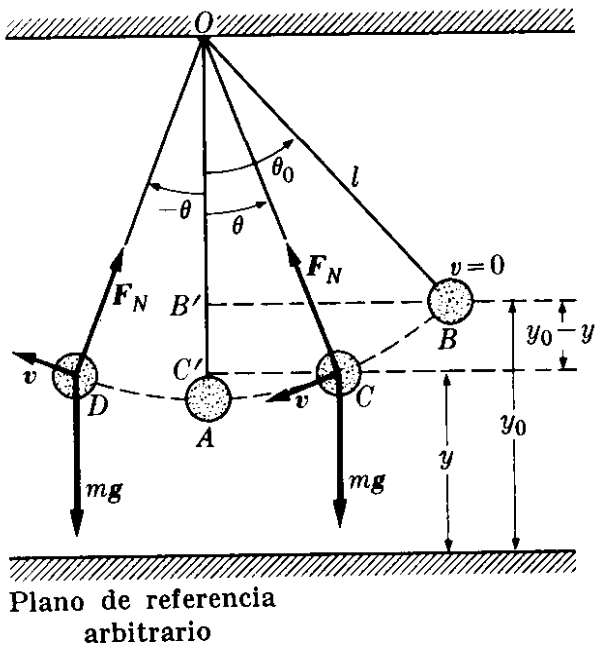

Fig. 8-13. Relaciones de energía en el movimiento de un péndulo.

8.7 *Energía potencial*

La situación ilustrada en la sección previa no es sino un ejemplo de una grande e importante clase de fuerzas, llamadas *conservativas*, por las razones que serán explicadas en las secciones finales de este capítulo.

Una fuerza es conservativa si su dependencia del vector posición $\boldsymbol{r}$ o de las coordenadas x, y, z de la partícula es tal que el trabajo W puede ser expresado como la diferencia entre los valores de una cantidad $E_p(x, y, z)$ evaluada en los puntos inicial y final. La cantidad $E_p(x, y, z)$ se llama *energía potencial*, y es una función de las coordenadas de las partículas. Luego, si $\boldsymbol{F}$ es una fuerza conservativa,

$$W = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = E_{p,A} - E_{p,B}. \tag{8.17}$$

Obsérvese que escribimos $E_{p,A} - E_{p,B}$ y no $E_{p,B} - E_{p,A}$; esto es, el trabajo efectuado es igual a E_p en el punto inicial, menos E_p en el final. En otras palabras,

> *la energía potencial es una función de las coordenadas tal que la diferencia entre sus valores en las posiciones inicial y final es igual al trabajo efectuado sobre la partícula para moverla de su posición inicial a la final.*

Estrictamente hablando, la energía potencial E_p debe depender tanto de las coordenadas de la partícula considerada, como de las coordenadas de todas las otras partículas del universo que interactúan con ella. Sin embargo, como mencionamos en el capítulo 7 cuando tratábamos de la dinámica de una partícula, suponemos el resto del universo esencialmente fijo, y así solamente las coordenadas de la partícula considerada aparecen en E_p.

El estudiante debe notar, comparando la ec. (8.17) con la expresión de la energía cinética (8.12), que la ec. (8.12) es válida en general no importando de qué fuerza $\boldsymbol{F}$ se trate. Siempre se cumple que $E_k = \frac{1}{2}mv^2$, mientras que la forma de la función $E_p(x, y, z)$ depende de la naturaleza de la fuerza $\boldsymbol{F}$, y no todas las fuerzas pueden satisfacer la condición establecida por la ec. (8.17). Sólo aquellas que la satisfagan se llaman *conservativas*. Por ejemplo, comparando las ecs. (8.17) y (8.16), notamos que la fuerza de gravedad es conservativa, y que la energía potencial debida a la gravedad es

$$E_p = mgy. \tag{8.18}$$

Análogamente, de la ec. (8.15), deducimos que la energía potencial correspondiente a una fuerza constante es

$$E_p = -\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}. \tag{8.19}$$

En la definición de la energía potencial siempre interviene una constante arbitraria, pues, por ejemplo, si escribimos $mgy + C$ en vez de la ec. (8.18), la ec. (8.16) permanece la misma, ya que la constante C, apareciendo en los dos términos que se restan, se cancela. Gracias a esta arbitrariedad, podemos definir el nivel de referencia o cero de la energía potencial, donde nos convenga mejor. Por ejemplo, para los cuerpos en caída, la superficie terrestre es el nivel de referencia más conveniente, y por ello la energía potencial debida a la gravedad es tomada como nula en la superficie terrestre. Para un satélite natural o artificial, se define la energía potencial de modo que sea cero a distancia infinita.

> *El trabajo efectuado por las fuerzas conservativas es independiente de la trayectoria.*

Podemos ver que es así a partir de la definición, ec. (8.17), ya que, cualquiera que sea la trayectoria que une a los puntos A y B, la diferencia $E_{p,A} - E_{p,B}$ es la misma porque depende solamente de las coordenadas de A y B. En particular, si la trayectoria es *cerrada* (Fig. 8-14), de modo que el punto final coincide con el inicial (esto es, A y B son el mismo punto), entonces $E_{p,A} = E_{p,B}$ y el trabajo es cero ($W = 0$). Lo que significa que en parte de la trayectoria el trabajo es positivo y en otra negativo pero igual en magnitud, dando un resultado neto nulo. Cuando la trayectoria es cerrada, la integral en la ec. (8.17) se escribe $\oint$. El círculo en el signo integral indica que la trayectoria es cerrada. Por consiguiente, para las fuerzas conservativas,

$$W_{\bigcirc} = \oint \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = 0. \tag{8.20*}$$

Recíprocamente, se puede probar que la condición expresada por la ec. (8.20) puede adoptarse como la definición de una fuerza conservativa. En otras palabras, si una fuerza $\boldsymbol{F}$ satisface la ec. (8.20) para cualquier camino cerrado, arbitrariamente escogido, entonces, puede probarse que la ec. (8.17) es correcta.

Para satisfacer la ec. (8.17) es necesario que

$$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -dE_p, \tag{8.21}$$

porque entonces

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_A^B dE_p \\ &= -(E_{p,B} - E_{p,A}) = E_{p,A} - E_{p,B}, \end{aligned}$$

de acuerdo con la ec. (8.17). Nótese que el signo negativo en la ec. (8.21) es necesario para obtener $E_{p,A} - E_{p,B}$ en vez de $E_{p,B} - E_{p,A}$.

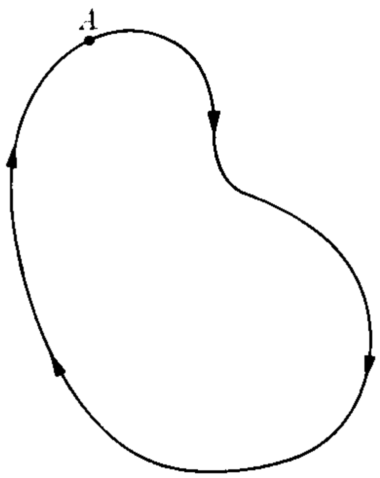

Fig. 8-14. El trabajo de una fuerza conservativa a lo largo de una trayectoria cerrada es nulo.

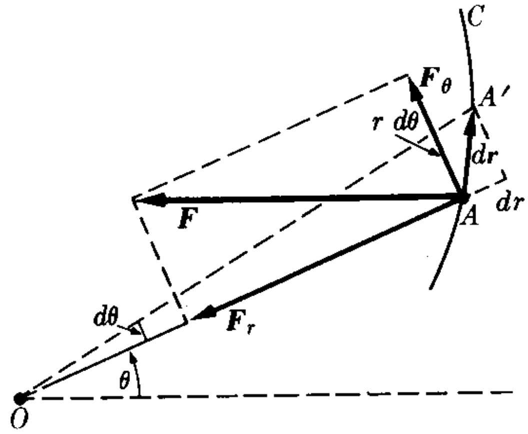

Figura 8-15

* Para cualquier vector $\boldsymbol{V}$ que sea función de posición, una integral de la forma $\oint \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{r}$ a lo largo de una trayectoria cerrada, se llama la *circulación* de $\boldsymbol{V}$. Aparecerá varias veces en este libro.

Puesto que $\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = F\,ds\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre la fuerza y el desplazamiento, podemos escribir en lugar de la ec. (8.21)

$$F\cos\theta = -\frac{dE_p}{ds}. \tag{8.22}$$

Ahora, como se explicó en relación con la Fig. 8-1, $F\cos\theta$ es la componente de la fuerza a lo largo de la dirección del desplazamiento ds; por tanto, si conocemos $E_p(x, y, z)$, podemos obtener la componente de $\boldsymbol{F}$ en cualquier dirección computando la cantidad $-\,dE_p/ds$, que es la derivada de E_p en aquella dirección, con signo negativo. Esto es lo que se llama la *derivada direccional* de E_p. Cuando un vector es tal que su componente en una dirección es igual a la derivada direccional de una función en aquella dirección, el vector se llama el *gradiente* de la función. Podemos así decir que $\boldsymbol{F}$ es el negativo del gradiente de E_p, y escribir la ec. (8.22) en la forma general:

$$\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} E_p,$$

donde "grad" significa gradiente. Cuando estamos interesados en las componentes rectangulares de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de los ejes X, Y, Z, la expresión $F\cos\theta$ en la ec. (8.22) será F_x, F_y y F_z y el desplazamiento ds será dx, dy y dz, respectivamente, de modo que

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}, \tag{8.23}$$

ó

$$\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} E_p = -\boldsymbol{u}_x\frac{\partial E_p}{dx} - \boldsymbol{u}_y\frac{\partial E_p}{\partial y} - \boldsymbol{u}_z\frac{\partial E_p}{\partial z}. \tag{8.24}$$

Nótese que al escribir la ec. (8.24) usamos el símbolo de la derivada parcial por primera vez en este libro. Esta terminología es necesaria porque la energía potencial $E_p(x, y, z)$ es, en general, una función de las tres variables, x, y, z. Pero al desplazarse una partícula una distancia dx a lo largo del eje X, por ejemplo, las coordenadas y, z permanecen invariables. Por ello, en vez de escribir dE_p/dx, debemos usar la notación $\partial E_p/\partial x$ que los matemáticos adoptan para esos casos.

Si el movimiento es plano y se usan las coordenadas r, θ (Fig. 8-15), el desplazamiento a lo largo del radio vector $\boldsymbol{r}$ es dr y el desplazamiento perpendicular al radio vector es $r\,d\theta$. Luego las componentes radial y transversal de la fuerza son

$$F_r = -\frac{\partial E_p}{\partial r},$$

$$F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial\theta}. \tag{8.25}$$

Nótese que usamos nuevamente la notación de derivación parcial.

Un caso importante es aquel en que la energía potencial E_p depende de la distancia r, pero no del ángulo θ; esto es, en vez de $E_p(r, \theta)$ tenemos $E_p(r)$. Entonces $\partial E_p/\partial\theta = 0$ y, de acuerdo a la ec. (8.25), $F_\theta = 0$. La fuerza entonces no tiene componente transversal, sino sólo radial, de manera que la fuerza es central: su línea de acción pasa siempre por el centro. Recíprocamente, si la fuerza es central, existe sólo componente radial, y $F_\theta = 0$, dando $\partial E_p/\partial\theta = 0$, lo que implica que E_p es independiente de θ. Obtenemos el resultado de que una fuerza central depende solamente de la distancia de la partícula al centro. Esta importante conclusión puede ser enunciada así:

> *la energía potencial asociada con una fuerza central depende solamente de la distancia de la partícula al centro de fuerza, y recíprocamente.*

Cuando las fuerzas no son centrales, existe un torque alrededor del punto O dado por $\tau = F_\theta r$, ya que la fuerza radial no contribuye al torque. Usando la segunda relación en la ec. (8.25), tenemos que el torque alrededor de O es

$$\tau = -\frac{\partial E_p}{\partial\theta}. \tag{8.26}$$

Esta es una expresión general que da el torque en una dirección perpendicular al plano en que se mide θ. Por consiguiente, ya que un torque produce un cambio correspondiente en el momentum angular [ver la ec. (7.38)], concluimos que

> *siempre que la energía potencial depende del ángulo, actúa un torque sobre el sistema, causando un cambio en el momentum angular en dirección perpendicular al plano del ángulo.*

Nota sobre el concepto de gradiente. En física encontraremos a menudo expresiones similares a la ec. (8.24); por consiguiente es importante lograr un claro entendimiento del concepto de gradiente. Consideremos una función $V(x, y, z)$ que depende de las tres coordenadas de un punto. Dibujamos las superficies

$$V(x, y, z) = C_1 \qquad \text{y} \qquad V(x, y, z) = C_2$$

(Fig. 8-16). Al movernos del punto A en C_1 a cualquier punto B en C_2, la función V experimenta siempre un cambio $C_2 - C_1$. Si la diferencia entre C_1 y C_2 es infinitesimal, podemos escribir $dV = C_2 - C_1$. El cambio en V por unidad de longitud, o "derivada direccional" de V es

$$dV/ds = (C_2 - C_1)/ds.$$

Consideremos el caso en que A y B estén en una normal N común a las dos superficies. La derivada direccional a lo largo de la normal AN es dV/dn. Pero en la Fig. 8-16 vemos que $dn = ds \cos\theta$. Luego

$$\frac{dV}{ds} = \frac{dV}{dn}\frac{dn}{ds} = \frac{dV}{dn}\cos\theta,$$

lo que relaciona la derivada direccional a lo largo de la normal con la derivada direccional a lo largo de cualquier otra dirección. Puesto que $\cos\theta$ toma su valor máximo para $\theta = 0$, concluimos que dV/dn da la máxima derivada direccional de V. Introduciendo el vector unitario $\boldsymbol{u}_N$, perpendicular a la superficie en A, definimos el gradiente de V por

$$\text{grad } V = \boldsymbol{u}_N \frac{dV}{dn},$$

y por tanto el gradiente es un vector perpendicular a la superficie $V(x, y, z) = \text{const}$, y es igual a la máxima derivada direccional de $V(x\ y, z)$. Podemos entonces escribir

$$\frac{dV}{ds} = |\text{grad } V| \cos\theta,$$

lo que indica que la razón de cambio en la dirección AD, o sea la derivada direccional de $V(x, y, z)$, es igual a la componente del vector grad V en aquella dirección. Esta es la relación usada al pasar de la ec. (8.22) a las ecs. (8.23) y (8.24). Para abreviar la notación, se ha introducido un operador diferencial, identificado por el símbolo ∇ léase "nabla". Se expresa así:

$$\nabla = \boldsymbol{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{u}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

En términos de este operador, el gradiente puede escribirse

$$\text{grad } V = \nabla V.$$

Para mayor información sobre el gradiente de una función, el estudiante puede ver *Calculus and Analytic Geometry* (tercera edición), por G. B. Thomas. Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1962.

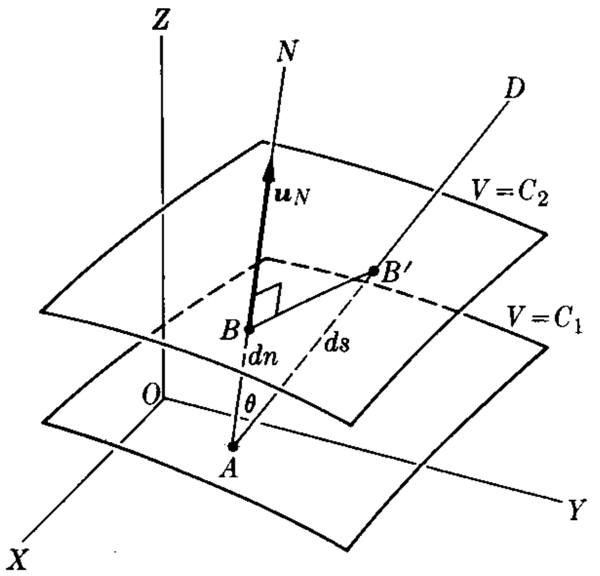

Fig. 8-16. El gradiente de $V(x, y, z)$ es una función vectorial perpendicular en cada punto a la superficie $V = \text{const}$.

EJEMPLO 8.8. Computar la energía potencial asociada con las siguientes fuerzas centrales : (a) $F = Kr$, (b) $F = K/r^2$. En ambos casos, si K es negativa la fuerza es atractiva y si K es positiva la fuerza es repulsiva.

Solución: Usando la ec. (8.25), para el caso (a), tenemos $F = -\partial E_p/\partial r = kr$ o $dE_p = -kr\,dr$. Integrando, obtenemos

$$E_p = \int -kr\,dr = -\tfrac{1}{2}kr^2 + C.$$

La constante de integración C se obtiene asignando un valor de E_p a cierta posición. En este caso se acostumbra hacer $E_p = 0$ en $r = 0$, de modo que $C = 0$ y $E_p = -\tfrac{1}{2}kr^2$. Considerando que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, podemos también escribir $E_p = -\tfrac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2)$. Usando la ec. (8.23), hallamos que las componentes rectangulares de la fuerza son

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = kx, \qquad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} = ky, \qquad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} = kz,$$

resultado que era de esperar, ya que la fuerza central $F = kr$ en forma vectorial es $\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{r} = k\,(\boldsymbol{u}_x x + \boldsymbol{u}_y y + \boldsymbol{u}_z z)$.

Para el caso (b) tenemos $F = -\partial E_p/\partial r = k/r^2$ o $dE_p = -k(dr/r^2)$. Integrando tenemos

$$E_p = \int -k\frac{dr}{r^2} = \frac{k}{r} + C.$$

Para fuerzas que contienen r en el denominador, es costumbre determinar C haciendo $E_p = 0$ en $r = \infty$, de modo que $C = 0$ y $E_p = k/r$. ¿Cuáles son las componentes rectangulares de la fuerza en este caso?

8.8 *Conservación de la energía de una partícula*

Cuando la fuerza que actúa en una partícula es conservativa, se puede combinar la ec. (8.17) con la ecuación general (8.13), lo que nos da $E_{k,B} - E_{k,A} = E_{p,A} - E_{,pB}$ o sea

$$(E_k + E_p)_B = (E_k + E_p)_A. \tag{8.27}$$

La cantidad $E_k + E_p$ es llamada la *energía total* de la partícula y designada por E; esto es, la energía total de una partícula es igual a la suma de su energía cinética y su energía potencial, o sea

$$E = E_k + E_p = \tfrac{1}{2}mv^2 + E_p(x, y, z). \tag{8.28}$$

La ec. (8.27) indica que

cuando las fuerzas son conservativas la energía total E de la partícula permanece constante,

ya que los estados designados por A y B son arbitrarios. Así, es posible escribir para cualquier posición de la partícula,

$$E = E_k + E_p = \text{const.} \tag{8.29}$$

En otras palabras, *la energía de la partícula se conserva.* Esta es la razón por la que decimos que cuando hay una energía potencial, las fuerzas son conservativas. Por ejemplo, en el caso de un cuerpo que cae hemos visto (ec. 8.18) que $E_p = mgy$, y la conservación de la energía nos da

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + mgy = \text{const.} \tag{8.30}$$

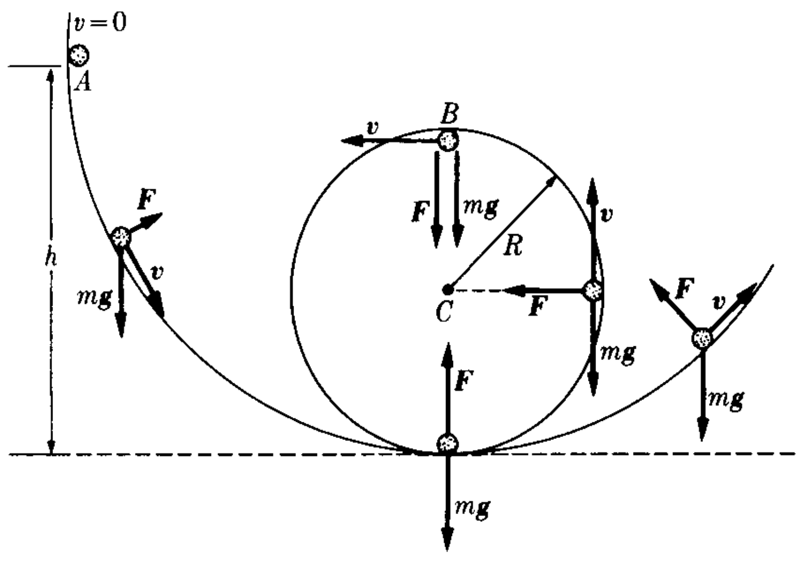

Figura 8-17

Si inicialmente la partícula está a la altura y_0 y su velocidad es cero, la energía total es mgy_0, y tenemos $\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgy_0$, ó $v^2 = 2g(y_0 - y) = 2gh$, donde $h = y_0 - y$ es la altura que ha caído. Este resultado corresponde a la bien conocida fórmula de la velocidad adquirida en caída libre desde una altura h. Debemos notar, sin embargo, que la ec. (8.30) no está restringida al movimiento vertical; es igualmente válida para el movimiento de un proyectil moviéndose en ángulo con la vertical.

Debe notarse que, para una energía total dada, la magnitud de la velocidad (cualquiera que sea la dirección del movimiento) en un punto dado es fijada por la ec. (8.29). Esto resulta particularmente claro en el caso del movimiento bajo la acción de la gravedad, como se muestra en la ec. (8.30).

EJEMPLO 8.9. Determinar la altura mínima desde la cual una bola debiera empezar a caer de manera que pueda completar el movimiento circular mostrado en Fig. 8-17. Suponer que la bola resbala sin rodar y sin ninguna fricción.

Solución: Supongamos que la bola es soltada del punto A a una altura h sobre la base de la circunferencia en la Fig. 8-17. La bola gana velocidad al moverse hacia abajo y empieza a perderla cuando sube por la circunferencia. En cualquier punto del riel, las fuerzas actuantes sobre la partícula son su peso $m\boldsymbol{g}$ y la fuerza $\boldsymbol{F}$ debida al riel. (La fuerza $\boldsymbol{F}$ apunta hacia el centro de la circunferencia, ya que el riel "empuja" pero no "tira"). En el punto más alto de la circunferencia, tanto $m\boldsymbol{g}$ como $\boldsymbol{F}$ apuntan hacia el centro O, y de acuerdo a la ec. (7.28) tenemos

$$F + mg = \frac{mv^2}{R},$$

donde R es el radio de la circunferencia. Ya que F no puede ser negativa, la mínima velocidad de la bola en B, si es que describe la circunferencia, debe corresponder a $F = 0$ o sea $mg = mv^2/R$, lo que da

$$v^2 = gR.$$

Si la velocidad es menor que $\sqrt{gR}$, el peso hacia abajo es mayor que la fuerza centrípeta requerida, y la bola se separará del riel antes de llegar al punto B, y describirá una parábola hasta caer de vuelta en aquél.

Para obtener la altura correspondiente a h, notamos que en el punto A la energía total es $E_A = (E_k + E_p)_A = mgh$, ya que $v = 0$. En B, donde $y = 2R$ y $v^2 = gR$,

$$E_B = (E_k + E_p)_B = \tfrac{1}{2}m(gR) + mg(2R) = \frac{5}{2}\, mgR.$$

Así, igualando los valores de E_A y E_B, obtenemos $h = \frac{5}{2} R$, que es la mínima altura del punto de partida de la bola si ella ha de completar la circunferencia. Este resultado es correcto siempre y cuando despreciemos las fuerzas de fricción. Si la bola rueda, debe usarse los métodos que se desarrollarán en el capítulo 10.

8.9 *Movimiento rectilíneo bajo fuerzas conservativas*

En el caso general del movimiento rectilíneo la energía potencial depende solamente de una coordenada, digamos x, y la ec. (8.28) para la conservación de la energía es

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + E_p(x). \tag{8.31}$$

donde E, la energía total, es una constante. Esta ecuación nos mostrará la utilidad práctica del concepto de energía. Para el movimiento rectilíneo $v = dx/dt$, y la ec. (8.31) da

$$E = \tfrac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + E_p(x). \tag{8.32}$$

Resolviendo para dx/dt, obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = \left\{\frac{2}{m}[E - E_p(x)]\right\}^{1/2}. \tag{8.33}$$

En las condiciones actuales podemos escribir esta ecuación en forma tal que las variables x y t estén separadas; esto es, que la variable x aparezca solamente en un lado de la ecuación y la variable t aparezca en el otro lado. Para nuestra ecuación, logramos esto escribiendo

$$\frac{dx}{\{(2/m)[E - E_p(x)]\}^{1/2}} = dt.$$

Integrando (y haciendo $t_0 = 0$ por conveniencia), tenemos

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\{(2/m)[E - E_p(x)]\}^{1/2}} = \int_0^t dt = t. \tag{8.34}$$

Esta ecuación nos permite obtener una relación entre x y t, y resuelve así el problema del movimiento rectilíneo de la partícula. Por consiguiente, siempre que podamos encontrar la función de energía potencial [y esto es relativamente fácil si conocemos la fuerza como función de x, ya que simplemente utilizamos la ec. (8.23) para obtener $E_p(x)$], la conservación de la energía expresada por la ec. (8.34) nos da directamente la solución del problema del movimiento rectilíneo.

EJEMPLO 8.10. Usar la ec. (8.34) para resolver el problema del movimiento rectilíneo bajo una fuerza constante.

Solución: En este caso F es constante. Si tomamos el eje X a lo largo de la dirección de la fuerza, la primera de las ecs. (8.23) nos da $F = -dE_p/dx$ o $dE_p = -F\,dx$. Integrando, obtenemos $E_p = -Fx + C$, y estableciendo $E_p = 0$ para $x = 0$, obtenemos $C = 0$. En esta forma

$$E_p = -Fx$$

es la expresión de la energía potencial asociada con una fuerza constante. Esto coincide con la ec. (8.29) si hacemos $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{u}_x F$; eso es, la fuerza $\boldsymbol{F}$ está en la dirección X. Usando la ec. (8.34), con $x_0 = 0$ por simplicidad, tenemos ahora

$$\frac{1}{(2/m)^{1/2}} \int_0^x \frac{dx}{(E + Fx)^{1/2}} = t$$

o sea

$$\frac{2}{F}(E + Fx)^{1/2} - \frac{2}{F}E^{1/2} = \left(\frac{2}{m}\right)^{1/2} t.$$

Despejando x, obtenemos

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{F}{m}\right)t^2 + \left(\frac{2E}{m}\right)^{1/2} t.$$

Pero $F/m = a$, y ya que $E = \frac{1}{2}mv^2 + Fx$ es la energía total, tenemos que para $t = 0$, cuando $x = 0$, la energía E es totalmente cinética e igual a $\frac{1}{2}mv_0^2$. Así $2E/m = v_0^2$, y obtenemos finalmente para x, $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$, que es la misma expresión obtenida anteriormente en la ec. (5.11), con $x_0 = 0$ y $t_0 = 0$. Este problema es suficientemente simple para ser resuelto fácilmente con los métodos del capítulo 5. Lo hemos presentado aquí principalmente como una ilustración de las técnicas para resolver la ecuación del movimiento usando el principio de la energía.

8.10 *Movimiento bajo fuerzas centrales conservativas*

En el caso de una fuerza central, cuando E_p depende solamente de la distancia r, la ec. (8.28) es

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + E_p(r), \tag{8.35}$$

a partir de la cual es posible determinar la velocidad a cualquier distancia. En muchos casos la función $E_p(r)$ disminuye en valor absoluto cuando r aumenta. Entonces a distancias muy grandes desde el centro, $E_p(r)$ es despreciable y la magnitud de la velocidad es constante e independiente de la dirección del movimiento. Este es el principio que aplicamos en el ejemplo 7.16 cuando, en la Fig. 7-28, indicamos que la velocidad final de la partícula que se aleja, en B, es la misma que la velocidad inicial en A.

Nótese que, cuando tratamos del movimiento bajo la influencia de fuerzas centrales, hay dos teoremas de conservación. Uno es el de conservación del momentum angular, discutido en la sección 7.13, y otro es el de conservación de la energía, expresado por la ec. (8.35). Cuando usamos coordenadas polares r y θ, recordando que las componentes de la velocidad son $v_r = dr/dt$ y $v_\theta = r\, d\theta/dt$, podemos escribir, de acuerdo con la ec. (5.63),

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Pero por el principio de conservación del momentum angular, usando la ec. (7.35), $L = mr^2\, d\theta/dt$, tenemos que

$$r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{L^2}{(mr)^2},$$

donde L es el momentum angular constante. Por consiguiente

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{(mr)^2}.$$

Introduciendo este resultado en la ec. (8.35), tenemos

$$E = \tfrac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + E_p(r). \tag{8.36}$$

Esta expresión se parece mucho a la ec. (8.32) para el movimiento rectilíneo, con velocidad dr/dt, si es que suponemos que, en lo que al movimiento radial se refiere, la partícula se mueve con una energía potencial "efectiva"

$$E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + E_p(r). \tag{8.37}$$

El primer término se llama el *potencial de energía centrífuga*, $E_{p,c}(r) = L^2/2mr^2$, porque la "fuerza" asociada con él, usando la ec. (8.25), es $F_c = -\partial E_{p,c}/\partial r = L^2/mr^3$ y, siendo positiva, apunta fuera del origen; esto es, es centrífuga. Desde luego ninguna fuerza centrífuga actúa sobre la partícula, excepto la que pueda deberse al potencial real $E_p(r)$, en el caso de que éste sea repulsivo y la fuerza centrífuga F_c es nada más que un útil concepto matemático. Físicamente este concepto describe la tendencia de la partícula, de acuerdo con la ley de inercia, de moverse en una línea recta evitando hacerlo en curva. Introduciendo la ec. (8.37) en la ec. (8.36), tenemos

$$E = \tfrac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + E_{p,\text{eff}}(r),$$

y resolviendo para dr/dt, obtenemos

$$\frac{dr}{dt} = \left\{\frac{2}{m}\left[E - E_{p,\text{eff}}(r)\right]\right\}^{1/2}, \tag{8.38}$$

que es formalmente idéntica a la ec. (8.33) para el movimiento rectilíneo. Separando las variables r y t e integrando (con $t_0 = 0$ por conveniencia), obtenemos

$$\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\{(2/m)[E - E_{p,\text{eff}}(r)]\}^{1/2}} = \int_0^t dt = t, \tag{8.39}$$

lo cual nos da la distancia r en función del tiempo [esto es, $r(t)$], y por consiguiente tenemos la solución de nuestro problema dinámico correspondiente al movimiento radial.

Al despejar de la expresión para el momento angular, $L = mr^2\, d\theta/dt$, la velocidad $d\theta/dt$, obtenemos

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}. \tag{8.40}$$

Introduciendo entonces la $r(t)$ obtenida de la ec. (8.39) en la ec. (8.40), expresamos L/mr^2 como función del tiempo, y al integrar esta expresión obtenemos

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t \frac{L}{mr^2}\, dt \qquad \text{ó} \qquad \theta = \theta_0 + \int_0^t \frac{L}{mr^2}\, dt. \tag{8.41}$$

Esto da θ en función del tiempo; esto es $\theta(t)$. En esta forma podemos resolver el problema completamente, dando los movimientos radiales y angulares como funciones del tiempo.

Algunas veces, sin embargo, nos interesa más la ecuación de la trayectoria. Combinando las ecs. (8.38) y (8.40) por división, podemos escribir

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\{(2/m)[E - E_{p,\text{eff}}(r)]\}^{1/2}}{L/mr^2} \tag{8.42}$$

o, separando las variables r y θ e integrando,

$$\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{(m/L)r^2\{(2/m)[E - E_{p,\text{eff}}(r)]\}^{1/2}} = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \theta - \theta_0. \tag{8.43}$$

Esta expresión que relaciona r con θ da la ecuación de la trayectoria en coordenadas polares. Recíprocamente, si conocemos la ecuación de la trayectoria, de manera que podamos computar $dr/d\theta$, la ec. (8.42) nos permite calcular la energía potencial y entonces calcular la fuerza.

Esta sección ha ilustrado la forma en que los principios de conservación del momentum angular y de la energía nos permiten resolver el movimiento de una partícula bajo la influencia de una fuerza central. A esta altura el estudiante habrá reconocido el hecho de que esos principios de conservación no son curiosidades matemáticas, sino herramientas reales y efectivas para resolver problemas dinámicos. Debemos notar que cuando el movimiento se debe a una fuerza central la conservación de la energía no es suficiente para resolver el problema. Es también necesario usar la conservación del momentum angular. En el caso del movimiento rectilíneo, la conservación de la energía *es* suficiente para resolver el problema. Ello se debe a que la energía siendo una cantidad escalar, no puede ser usada para determinar la dirección del movimiento y a que en el movimiento rectilíneo la dirección está dada desde el comienzo.

Finalmente, declaremos en particular que los principios de conservación del momentum angular y de la energía, tal como son usados en este capítulo, son propiedades asociadas con una partícula individual bajo las circunstancias especiales de su movimiento, y que no hay relación directa con la posible conservación de la energía total del universo. Este asunto será discutido en mayor detalle en el siguiente capítulo.

8.11 *Discusión de curvas de energía potencial*

Los gráficos que representan $E_p(x)$ contra x en problemas rectilíneos de una sola dimensión y $E_p(r)$ contra r en los problemas de fuerza central son muy útiles para ayudar a comprender el movimiento de una partícula, aún sin resolver la ecuación del movimiento. En la Fig. 8-18 hemos ilustrado una posible curva de energía potencial para un movimiento unidimensional. Cuando usamos la primera de las ecs. (8.23), la fuerza sobre la partícula para cualquier valor de x

está dada por $F = - dE_p/dx$.* Pero dE_p/dx es la pendiente de la curva $E_p(x)$. La pendiente es positiva siempre que la curva crece, y negativa cuando la curva decrece. Por consiguiente, la fuerza F (esto es el negativo de la pendiente), es negativa, o dirigida a la izquierda, cuando la energía potencial está aumentando y positiva, o dirigida a la derecha, cuando la energía potencial está disminuyendo. Esta situación ha sido indicada en la Fig. 8-18 por flechas horizontales en diferentes regiones marcadas debajo de la figura.

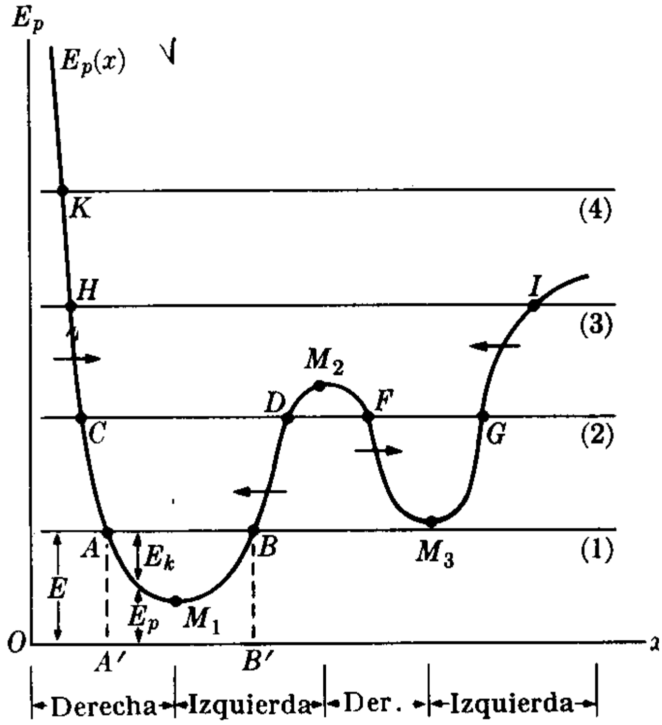

Fig. 8-18. Relación entre el movimiento en línea recta y la energía potencial.

En los puntos donde la energía potencial es mínima o máxima, tales como M_1, M_2 y M_3, $dE_p/dx = 0$ y por tanto $F = 0$; esto es, tales posiciones son de equilibrio. Aquellas posiciones donde $E_p(x)$ es *mínima* el equilibrio es *estable;* cuando la partícula es desplazada ligeramente de su posición de equilibrio, está sometida a una fuerza que trata de devolverla a dicha posición. Donde $E_p(x)$ es máxima, el equilibrio es inestable, ya que si la partícula sufre un ligero desplazamiento de la posición de equilibrio, experimenta una fuerza que trata de moverla aún más lejos de dicha posición.

Consideremos ahora una partícula con energía total E, indicada por la línea horizontal (1) de la Fig. 8-18. En cualquier posición x, la energía potencial E_p está dada por la ordenada de la curva y la energía cinética, $E_k = E - E_p$, está dada por la distancia de la curva $E_p(x)$ a la línea E. La línea E corta la curva $E_p(x)$ en los puntos A y B. A la izquierda de A y a la derecha de B la energía E es menor que la energía potencial $E_p(x)$, y por tanto en dichas regiones la energía cinética $E_k = E - E_p$ sería negativa. Pero esto es imposible ya que $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ es necesariamente positiva. Por consiguiente, el movimiento de la partícula está limitado al intervalo AB y la partícula oscila entre $x = A'$ y $x = B'$. En dichos puntos la velocidad se anula y la partícula cambia su movimiento. Esos puntos se llaman *de retorno.*

Si la partícula tiene una energía mayor, tal como la que corresponde a la línea (2), hay dos regiones posibles de movimiento. Una es oscilante entre C y D y la otra oscilante entre F y G. Sin embargo, si la partícula está en una región no puede saltar nunca a la otra, porque ello requeriría pasar por la región DF donde la energía cinética sería negativa y por lo tanto dicha región es prohibida. Decimos que las dos regiones donde el movimiento es posible están separadas

* No es necesario usar la notación de derivada parcial en este caso ya que E_p depende solamente de una variable, x.

por una *barrera de potencial.* En el nivel de energía (3), el movimiento es oscilatorio entre H e I. Finalmente en el nivel de energía (4) el movimiento no es más oscilatorio y la partícula puede moverse entre K y el infinito. Por ejemplo, si la partícula se está moviendo inicialmente hacia la izquierda, al llegar a K "rebota", alejándose por la derecha sin regresar jamás. Cuando consideramos el movimiento de las partículas atómicas, donde se aplica la mecánica cuántica, la descripción que hemos dado requiere algunas modificaciones.

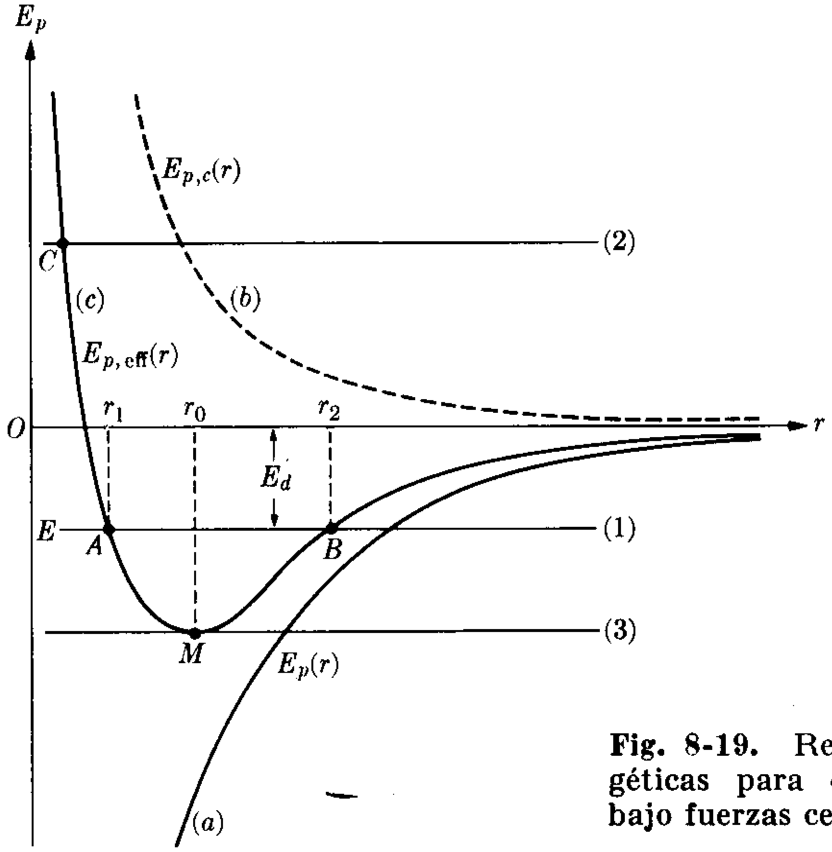

Fig. 8-19. Relaciones energéticas para el movimiento bajo fuerzas centrales.

Considerando ahora el importante caso de las fuerzas centrales, supongamos una energía potencial $E_p(r)$ correspondiente a una fuerza que es atractiva a todas las distancias: $-\partial E_p/\partial r$ es negativa y $E_p(r)$ es una función creciente, tal como se indica con la curva (*a*) de la Fig. 8-19. El potencial de energía centrífugo $E_{p,c} = L^2/2mr^2$ está indicado por la línea punteada (*b*). El término centrífugo es muy pequeño a grandes distancias pero aumenta rápidamente a pequeñas distancias. En muchos casos de interés físico el potencial de energía centrífuga es el término dominante a pequeñas distancias, dando como resultado una energía potencial $E_{p,\text{eff}} = E_{p,c} + E_p(r)$ con la forma indicada por la curva (*c*).

Si la energía total E de la partícula corresponde a la línea horizontal (1), el radio de la órbita oscilará entre los valores máximo y mínimo r_1 y r_2, y la órbita tendrá la forma ilustrada en la Fig. 8-20. Pero si la energía corresponde a un valor tal como el de la línea (2) de la Fig. 8-19, la órbita no está limitada, y la partícula viene del infinito hasta el punto C de aproximación mínima a la distancia r_{min}, y se aleja entonces sin volver a regresar, tal como se muestra en la Fig. 8-21. Si la energía corresponde al mínimo M de $E_{p,\text{eff}}$, como se indica con la

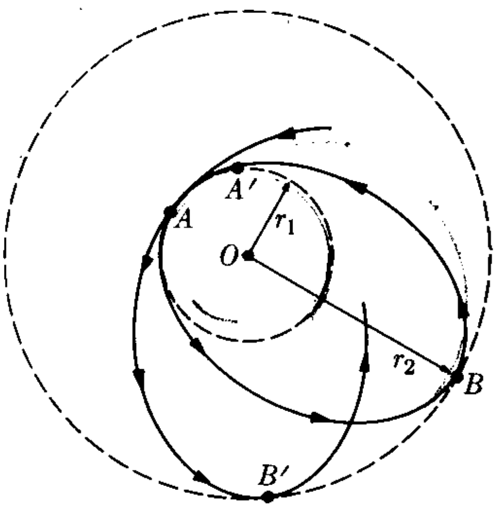

Fig. 8-20. Forma general de la trayectoria para el movimiento bajo fuerzas centrales.

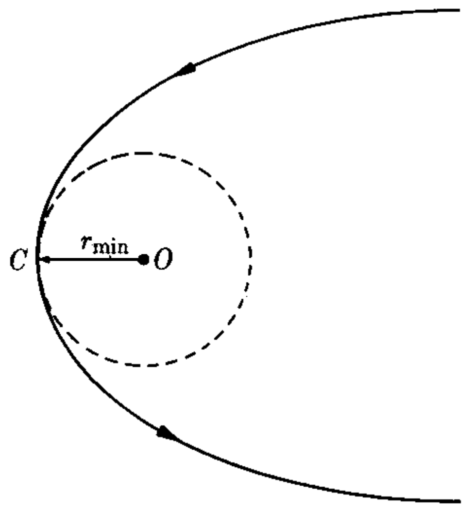

Fig. 8-21. Distancia de mayor aproximación.

línea (3), entonces existe una sola intersección y la distancia al centro permanece constante, dando como resultado que la partícula describa una trayectoria circular de radio r_0. Nótese que la distancia de aproximación mínima aumenta con los valores crecientes del momentum angular, debido al efecto de la energía potencial centrífuga $E_{p,c}(r)$.

Si, por algún mecanismo, una partícula que tiene energía igual a la del nivel (1) de la Fig. 8-19 puede absorber energía y por tanto "saltar" al nivel de energía (2), se alejará del centro de fuerza; esto es, se "disociará" del centro de fuerza. La mínima energía que una partícula requiere para disociarse del nivel de energía (1) ha sido indicada en la Fig. 8-19 por E_d. Por otra parte, si la partícula inicialmente en el nivel de energía (2) por algún proceso pierde energía y pasa cerca del centro de fuerza, puede saltar al nivel de energía (1), y permanecerá entonces en una órbita limitada. Podemos decir que ha sido "capturada" por el centro de fuerza. Esta situación se presenta, por ejemplo, en la disociación y formación molecular.

En el caso de una molécula diatómica tal como H_2 o CO, la energía potencial E_p para la interacción entre los dos átomos tiene la forma (*c*) en la Fig. 8-19. Tal energía potencial, ilustrada por la curva (*a*) en la Fig. 8-22, corresponde a una atracción a grandes distancias y a una repulsión a cortas distancias, impidiendo así que los dos átomos se unan en una sola unidad aun en la ausencia del efecto centrífugo. El efecto del potencial centrífugo $E_{p,c}$ dado por la curva punteada (*b*) es elevar la curva al perfil (*c*). Podemos, por consiguiente, visualizar los átomos de la molécula con una energía E en un estado de oscilación relativa entre P_1 y P_2. Si la molécula absorbe energía en cantidad apropiada, puede disociarse y separarse en dos átomos que se alejaran uno del otro.

EJEMPLO 8.11. La energía potencial para la interacción entre dos moléculas de gas puede aproximarse por la expresión

$$E_p(r) = -E_{p,0}\left[2\left(\frac{r_0}{r}\right)^6 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{12}\right],$$

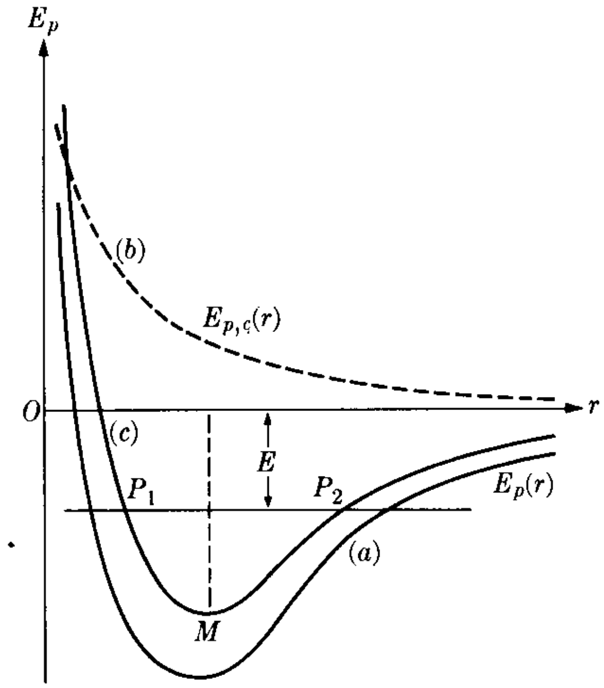

Fig. 8-22. Potencial intermolecular.

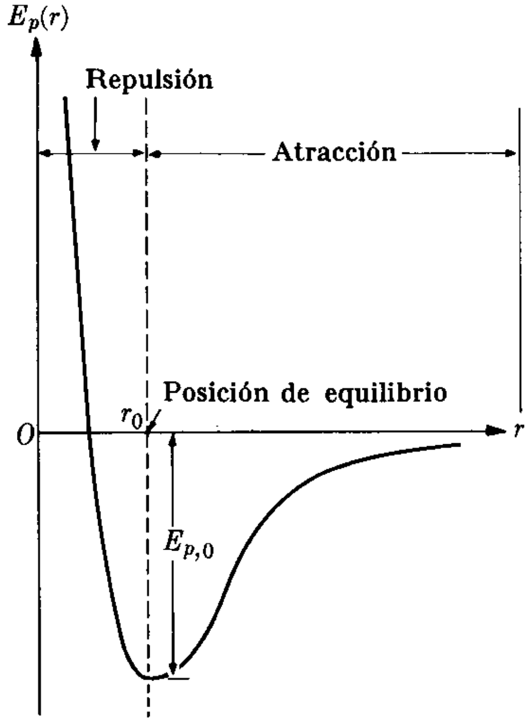

Fig. 8-23. Potencial intermolecular de Lennard-Jones.

donde $E_{p,0}$ y r_0 son constantes positivas y r es la separación entre las moléculas. Este modelo para las energías potenciales moleculares fue introducido por el científico inglés J. Lennard-Jones. Hallar la posición de equilibrio y el valor de la energía potencial en dicho punto. El gráfico de $E_p(r)$ está mostrado en la Fig. 8.23.

Solución: En la posición de equilibrio, $F = -\partial E_p/\partial r = 0$. Por tanto

$$\frac{\partial E_p}{\partial r} = -E_{p,0}\left[-12\frac{r_0^6}{r^7} + 12\frac{r_0^{12}}{r^{13}}\right] = 0$$

o sea $r = r_0$. Poniendo $r = r_0$ en $E_p(r)$, obtenemos $E_p = -E_{p,0}$ para la energía potencial en el punto de equilibrio. Para distancias menores que r_0, la fuerza intermolecular es repulsiva [$E_p(r)$ es una función decreciente] y para distancias mayores que r_0 es atractiva [$E_p(r)$ es una función creciente].

¿Cuál es el término dominante en $E_p(r)$ a pequeñas distancias, y cuál a grandes distancias? Sugerimos que el estudiante represente la fuerza como función de la separación r y determine la separación para la cual la fuerza atractiva es máxima. Sugerimos también que busque en la literatura valores apropiados de $E_{p,0}$ y r_0.

8.12 *Fuerzas no conservativas*

Es fácil encontrar fuerzas en la naturaleza que no son conservativas. Un ejemplo de ellas es la fricción. La fricción siempre se opone al desplazamiento. Su trabajo depende de la trayectoria seguida y, aunque la trayectoria pueda ser cerrada, el trabajo no es nulo, de modo que la ec. (8.20) no se aplica. Similarmente, la fricción en los fluidos se opone a la velocidad, y su valor depende de ésta mas no de la posición. Una partícula puede estar sujeta a fuerzas conservativas y no conservativas al mismo tiempo.

Por ejemplo, una partícula que cae en un fluido está sujeta a la fuerza gravitacional conservativa y a la fuerza de fricción no conservativa. Llamando E_p a la energía potencial correspondiente a las fuerzas conservativas y W' al trabajo hecho por las fuerzas no conservativas (trabajo que, en general, es negativo porque las fuerzas de fricción se oponen al movimiento), el trabajo total hecho en la partícula al moverse de A a B es $W = E_{p,A} - E_{p,B} + W'$. Usando la ec. (8.13), podemos escribir

$$E_{k,B} - E_{k,A} = E_{p,A} - E_{p,B} + W'$$

o

$$(E_k + E_p)_B - (E_k + E_p)_A = W'. \tag{8.44}$$

En este caso la cantidad $E_k + E_p$ no permanece constante sino decrece (aumenta) si W' es negativo (positivo). Pero por otra parte, *no podemos* llamar a $E_k + E_p$ la energía total de la partícula, porque este concepto no es aplicable en este caso, ya que no incluye todas las fuerzas presentes. El concepto de energía total de una partícula tiene significado sólo si *todas* las fuerzas son conservativas. Sin embargo la ec. (8.44) es útil cuando queremos efectuar una comparación entre el caso en que actúan solamente las fuerzas conservativas (de manera que $E_k + E_p$ sea la energía total) y el caso en que hay fuerzas no conservativas adicionales. Entonces decimos que la ec. (8.44) da la ganancia o la pérdida de energía debida a las fuerzas no conservativas.

El trabajo no conservativo W' representa así una transferencia de energía que, al corresponder a un movimiento molecular, es en general irreversible. La razón para no poder ser recobrado es la dificultad, aun dentro de un punto de vista estadístico, de volver todos los movimientos moleculares al estado inicial. En algunos casos, sin embargo, los movimientos moleculares pueden estadísticamente ser devueltos a las condiciones originales. Esto es, aun si el estado final no es microscópicamente idéntico al inicial, son estadísticamente equivalentes. Este es el caso, por ejemplo, de un gas que se expande muy lentamente mientras hace trabajo. Si después de la expansión el gas es comprimido lentamente a su condición física original, el estado final es estadísticamente equivalente al inicial. El trabajo efectuado durante la compresión es el negativo del trabajo de expansión y el trabajo total es por tanto cero.

La existencia de fuerzas no conservativas tal como la fricción no debe ser considerada como implicando necesariamente que puedan existir interacciones no conservativas entre partículas fundamentales. Debemos recordar que las fuerzas de fricción no corresponden a una interacción entre dos partículas sino que son conceptos realmente estadísticos (recordar la discusión de la sección 7.9). La fricción, por ejemplo, es el resultado de muchas interacciones individuales entre las moléculas de los dos cuerpos en contacto. Cada una de estas interacciones puede ser expresada por una fuerza conservativa. Sin embargo, el efecto macroscópico no es conservativo por el siguiente motivo: aunque el cuerpo, al completar una órbita cerrada, está macroscópicamente en su posición original, las moléculas individuales no han retornado a su condición original. Por consiguiente, el estado final no es microscópicamente idéntico al inicial, ni tampoco equivalente en un sentido estadístico.

EJEMPLO 8.12. Un cuerpo cae a través de un fluido viscoso partiendo del reposo y de una altura y_0. Calcular la rapidez con que se disipa su energía cinética, y su energía potencial gravitatoria.

Solución: Cuando el cuerpo se halla a cierta altura cayendo con una velocidad v, la suma de sus energías cinética y potencial gravitatoria es $\frac{1}{2}mv^2 + mgy$. La rapidez de disipación de energía (o pérdida de energía por unidad de tiempo) debida a la acción de las fuerzas viscosas no conservativas es por tanto

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p) = \frac{d}{dt}(\tfrac{1}{2}mv^2 + mgy).$$

Sugerimos primero al estudiante, usando las ecuaciones del ejemplo 7.7, expresar v^2 e y como funciones del tiempo. Entonces, por cálculo de la derivada anterior, podrá resolver el problema.

Proponemos, sin embargo, demostrar cómo puede ser resuelto el problema por un procedimiento diferente. De acuerdo a la ec. (8.44), si los puntos A y B son muy cercanos entre sí, podemos escribir la ecuación $d(E_k + E_p) = dW' = F'dx$, donde F' es la fuerza no conservativa. En nuestro ejemplo F' es debida a la fricción del fluido y tiene la forma $F_f = -k\eta v$ dada en la ecuación (7.18). Así

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p) = F'\frac{dx}{dt} = (-K\eta v)v = -K\eta v^2.$$

Para v tomamos el resultado obtenido en el ejemplo 7.8,

$$v = \frac{F}{K\eta}[1 - e^{-(K\eta/m)t}],$$

donde $F = mg$ es el peso de la partícula (corregido según el efecto de flotación debido al fluido). Por tanto

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p) = -\frac{m^2g^2}{K\eta}[1 - e^{-(K\eta/m)t}]^2.$$

El signo negativo para la rapidez de disipación energética indica que el cuerpo está perdiendo energía cinética y potencial gravitatoria. Sin embargo, esta energía no está "perdida", sino transferida a las moléculas del fluido en una forma que es prácticamente imposible de recobrar. Después de un cierto tiempo la exponencial es esencialmente cero. Por tanto podemos escribir

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p) = -\frac{m^2g^2}{K\eta},$$

demostrando así que la energía es perdida con rapidez constante. Esta condición es llamada estacionaria.

Es interesante observar este resultado desde un ángulo diferente. Vimos en el ejemplo 7.8 que después de un tiempo largo la velocidad se torna constante e igual a $F/K\eta$, donde $F = mg$. En esa forma la energía cinética E_k permanece constante y solamente la energía potencial $E_p = mgy$ varía. Por consiguiente podemos escribir

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p)_{ss} = \frac{dE_p}{dt} = \frac{d}{dt}(mgy) = mg\frac{dy}{dt}.$$

donde el subíndice *ss* significa que éste es un problema estacionario. Pero dy/dt es la velocidad límite dada en la ec. (7.21), y podemos escribir $dy/dt = -F/K\eta = -mg/K\eta$. La razón para el signo negativo es que y es medida hacia arriba y que la velocidad límite está dirigida hacia abajo. Sustituyendo este valor en la expresión previa, obtenemos

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p)_{ss} = mg\left(-\frac{mg}{K\eta}\right) = -\frac{m^2g^2}{K\eta},$$

que coincide con el resultado obtenido antes. Notamos, entonces, que después de cierto tiempo la energía potencial gravitatoria perdida por el cuerpo es disipada en agitación molecular del fluido. Esta es una manera de decir que la fuerza de gravitación es balanceada por la fuerza opuesta debida a la viscosidad del ruido.

8.13 *Teorema del virial para una sola partícula*

Este teorema (aunque no es tan importante como el de conservación del momentum angular bajo una fuerza central o el de conservación de energía bajo una fuerza conservativa) es muy útil para obtener ciertos resultados prácticos.

Considérese una partícula de masa m en movimiento bajo la acción de una fuerza $\boldsymbol{F}$. Definamos la cantidad escalar $A = m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}$, donde $\boldsymbol{r}$ es el vector posición de la partícula y $\boldsymbol{v}$ su velocidad. Tomando la derivada temporal de A, tenemos

$$\frac{dA}{dt} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{r} + m\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r} + mv^2,$$

ya que $\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v}/dt$ y $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$. El último término, según la ec. (8.12), es el doble de la energía cinética de la partícula y en el primer término podemos escribir $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$. Luego

$$\frac{dA}{dt} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r} + 2E_k.$$

Si tomamos el promedio temporal de esta ecuación, tenemos

$$\overline{\left(\frac{dA}{dt}\right)} = \overline{(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r})} + \overline{2(E_k)}. \tag{8.45}$$

El promedio temporal, en un intervalo τ, de cualquier cantidad $f(t)$ que depende del tiempo se define por

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t)\,dt.$$

En nuestro caso, entonces,

$$\overline{\left(\frac{dA}{dt}\right)} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{dA}{dt}\,dt = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dA = \frac{A - A_0}{\tau}. \tag{8.46}$$

Si el tiempo τ es muy grande y si A no crece indefinidamente con el tiempo, la cantidad $(A - A_0)/\tau$ puede ser tan pequeña (si τ es suficientemente grande) que puede ser considerada nula. Este es el caso de la partícula que se mueve dentro de una región limitada. Por ejemplo, un electrón en un átomo se mueve en una región espacial limitada y los valores de $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{v}$ que le pertenecen, y que son las cantidades que intervienen en la definición de A, son acotados. Puede decirse lo mismo de la tierra en su movimiento alrededor del sol. Por tanto, poniendo $\overline{(dA/dt)} = 0$ en la ec. (8.45), hallamos que

$$\overline{(E_k)} = -\tfrac{1}{2}\overline{(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r})}. \tag{8.47}$$

Este es el *teorema del virial* para una partícula. La cantidad $-\tfrac{1}{2}\overline{(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r})}$ se llama el *virial de la partícula.*

El teorema del virial adopta una forma especial cuando las fuerzas son centrales y conservativas. Si $E_p(r)$ es la energía potencial, entonces $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{u}_r dE_p/dr$ y $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r} = -r\,dE_p/dr$ ya que $\boldsymbol{u}_r\cdot\boldsymbol{r} = r$. Luego, la ec. (8.47) se transforma en

$$\overline{(E_k)} = \frac{1}{2}\overline{\left(r\frac{dE_p}{dr}\right)}. \tag{8.48}$$

Supóngase que la energía potencial es de la forma $E_p = -k/r^n$. Entonces

$$\frac{dE_p}{dr} = n\frac{k}{r^{n+1}} = -\frac{nE_p}{r},$$

y la ec. (8.48) viene a ser

$$\overline{(E_k)} = -\tfrac{1}{2}n\overline{(E_p)}. \tag{8.49}$$

Con este resultado, obtenemos una relación entre los promedios temporales de las energías cinética y potencial de la partícula.

8.14 Crítica del concepto de energía

En este capítulo hemos visto cómo podemos usar el concepto de energía de manera muy efectiva para resolver ciertos problemas dinámicos de una partícula cuando conocemos la fuerza en función de la posición. Esta es una de las razones básicas para introducir el concepto de energía en física.

Nuestra experiencia inmediata nos lleva a reconocer que los cuerpos a nuestro alrededor están en movimiento. Atribuimos dichos movimientos a las interacciones entre los cuerpos, y los describimos por medio de los conceptos de fuerza y energía. Tales conceptos tienen un solo propósito: proporcionar métodos útiles para analizar y predecir los movimientos que observamos. La gran utilidad del concepto de energía potencial, como la del concepto de fuerza, es que nos permite asociar formas específicas de energía potencial con interacciones específicas observadas en la naturaleza. Tal resultado no es sorprendente, ya que la fuerza $\boldsymbol{F}$ está relacionada con la energía potencial E_p por medio de la ec. (8.24). Es dicha relación entre energía potencial e interacción lo que da verdaderamente significado físico a la idea de energía potencial.

Al conocer la energía potencial como función de la posición, podemos describir cualitativamente el movimiento, como se indicó en la sección 8.11, o cuantitativamente como se explicó en las secciones 8.9 y 8.10. En futuros capítulos discutiremos el hecho de que la interacción entre dos cuerpos puede ser descrita como un intercambio de energía o como un intercambio de momentum. Cualquiera de tales descripciones proporciona una representación conveniente y útil de una interacción. Alertamos al estudiante que, en lo que resta del libro, describiremos los procesos que observamos en la naturaleza casi enteramente por medio de los conceptos de momentum y energía.

Bibliografía

1. "Energy", S. Schurr, *Sci. Am.*, septiembre de 1963, pág. 110
2. "Newton's Law of Motion and the 17th Century Laws of Impact", A. Arons y A. Bork, *Am. J. Phys.* **32**, 313 (1964)
3. *Mechanics* (segunda edición), por K. Symon. Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1964, secciones 2-1, 2-5, 3-7 y 3-12
4. *Physical Mechanics* (tercera edición), por R. Lindsay, Princeton, N. J. : Van Nostrand, 1963, cap. 4
5. *Introduction to Engineering Mechanics*, por J. Huddleston. Reading, Mass. : Addison-Wesley (1961), caps. 20 y 21
6. *Vector Mechanics*, por D. Christie. New York : McGraw-Hill, 1964, caps. 7 y 17 ; secs. 12.6 hasta 12.8
7. *A Source Book of Physics*, W. F. Magie. Cambridge, Mass. : Harvard University Press, 1963, pág. 59 (Young)
8. *Foundations of Modern Physical Science*, por G. Holton y D. H. D. Roller. Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1958, cap. 18
9. "Resource Letter EEC-1 on the Evolution of Energy Concepts from Galileo to Helmholtz", T. Brown ; *Am. J. Phys.* **33**, 759 (1965)

Problemas

8.1 Se aplica una fuerza F, que dura 20 s, a un cuerpo de 500 kg de masa. El cuerpo inicialmente en reposo, adquiere una velocidad de 0,5 m s^{-1} como resultado de la fuerza. Si ésta aumenta durante 15 s linealmente con el tiempo a partir de 0 y entonces disminuye a cero en 5 s, (a) hallar el impulso en el cuerpo causado por la fuerza, (b) hallar la máxima fuerza ejercida en el cuerpo y (c) representar F contra t encontrando el área bajo la curva. ¿Coincide el valor de dicha área con el resultado de (a)? Suponer que la fuerza F es la única que actúa sobre el cuerpo.

8.2 Calcular el trabajo de una fuerza constante de 12 N, cuyo punto de aplicación se mueve 7 m, si el ángulo entre las direcciones de la fuerza y el desplazamiento es (a) 0°, (b) 60°, (c) 90°, (d) 145°, (e) 180°.

8.3 Calcular el trabajo efectuado por un hombre que arrastra un saco de harina de 65 kg por 10 m a lo largo del piso con una fuerza de 25 kgf y que luego lo levanta hasta un camión cuya plataforma está a 75 cm de altura. ¿Cuál es la potencia promedio desarrollada si el proceso entero tomó 2 min?

8.4 Se define un *pie-libra* como el trabajo efectuado por una fuerza de 1 lbf al mover un cuerpo una distancia de 1 pie en su propia dirección. Verificar que 1 pie-lb es igual a 1,356 J, y que 1 hp es igual a 746 W. Demostrar que cuando la masa está dada en slugs y la velocidad en pie s^{-1}, la energía cinética queda expresada en pie-lb.

8.5 Un cuerpo de 4 kg de masa se mueve hacia arriba en un plano inclinado 20° con respecto a la horizontal. Sobre el cuerpo actúan las siguientes fuerzas: una fuerza horizontal de 80 N, una fuerza paralela al plano de 100 N, favoreciendo el movimiento, y una fuerza constante de fricción de 10 N que se opone al movimiento. El cuerpo se traslada 20 m a lo largo del plano. Calcular el trabajo total efectuado por el sistema de fuerzas actuantes sobre el cuerpo, así como el trabajo de cada fuerza.

8.6 Un anillo m de kg de masa resbala a lo largo de un arco metálico ABC muy pulido (Fig. 8-24) que es arco de una circunferencia de 4 pies de radio. Sobre el anillo actúan dos fuerzas F y F', cuyas magnitudes son 40 N y 150 N respectivamente. La fuerza F es siempre tangente a la circunferencia. La fuerza F' actúa en dirección constante formando un ángulo de 30° con la horizontal. Calcular el trabajo total efectuado por el sistema de fuerzas sobre el anillo al moverse éste de A a B y de A a C.

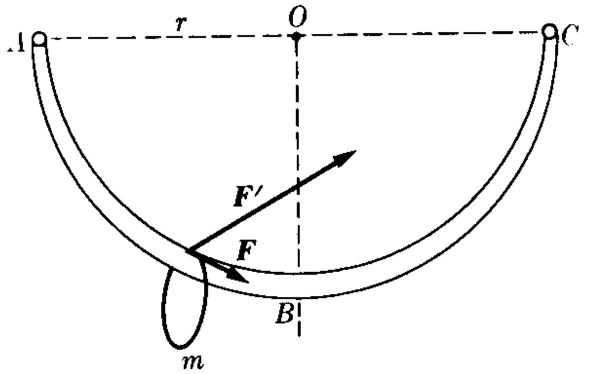

Figura 8-24

8.7 Un cuerpo de 0,10 kg de masa cae de una altura de 3 m sobre un montón de arena. Si el cuerpo penetra 3 cm antes de detenerse, que fuerza constante ejerció la arena sobre él?

8.8 Un cuerpo con 1000 kg de masa cae de una altura de 10 m sobre la cabeza de una barreta metálica clavada perpendicularmente en el suelo hundiéndola 1 cm más. Calcular la fuerza resistente promedio ejercida por el terreno contra la barreta. (Suponer que toda la energía cinética del cuerpo se transforma en trabajo para hundir la barreta).

8.9 Un hombre de 80 kg de masa sube por un plano inclinado 10° con respecto a la horizontal a una velocidad de 6 km hr^{-1}. Calcular la potencia desarrollada.

8.10 Un ascensor levanta 10 pasajeros 80 m en 3 min. Cada pasajero tiene una masa de 80 kg, y el ascensor una masa de 1000 kg. Calcular la potencia de su motor en hp.

8.11 Un automóvil sube por un camino de 3° de inclinación con una velocidad constante de 45 km hr^{-1}. La masa del automóvil es de 1600 kg. ¿Cuál es la potencia desarrollada por el motor? ¿Cuál es el trabajo efectuado en 10 s? Despreciar las fuerzas de fricción.

8.12 Un automóvil de 2000 lbf de peso moviéndose en un camino horizontal alcanza una velocidad máxima de 100 pies s^{-1} cuando el motor desarrolla su máxima potencia de 50 hp. Calcular la máxima velocidad del automóvil al subir una colina con 5% de inclinación. Suponer que la resistencia del aire es constante.

8.13 Resolver el problema anterior para un automóvil que baja la colina.

8.14 Una fuerza constante de 60 dinas actúa por 12 s en un cuerpo cuya masa es de 10 gm. El cuerpo tiene una velocidad inicial de 60 cm s^{-1} en la misma dirección de la fuerza. Calcular (a) el trabajo efectuado por la fuerza, (b) la energía cinética final, (c) la potencia desarrollada, y (d) el aumento de la energía cinética.

8.15 Repetir el problema anterior para una fuerza que es perpendicular a la velocidad inicial.

8.16 (a) ¿Qué fuerza constante debe ejercer el motor de un automóvil de 1500 kg de masa para aumentar la velocidad de 4 km hr^{-1} a 40 km hr^{-1} es 8 s? (b) Determine la variación del momentum y de la energía cinética. (c) Determine el impulso recibido y el trabajo efectuado por la fuerza. (d) Compute la potencia promedio del motor.

8.17 Una pequeña bola de acero de 1 kg de masa está amarrada al extremo de un alambre de 1 m de longitud girando en un círculo vertical alrededor del otro extremo con una velocidad angular constante de 120 rad s^{-1}. Calcular la energía cinética. Si es más bien la energía total la que permanece constante y no la velocidad angular, ¿cuál es el cambio en la energía cinética y en la velocidad angular entre el punto más alto y el más bajo del círculo? Suponer que el valor dado para la velocidad angular se refiere al punto más alto.

8.18 Un cuerpo de masa m se mueve $\boldsymbol{V}$ relativa a un observador O y con velocidad $\boldsymbol{V}'$ relativa a O'. La velocidad relativa entre O y O' es $\boldsymbol{v}$. Hallar la relación entre las energías cinéticas E_k y E'_k de la partícula medidas por O y O'.

8.19 Expresar, en eV, la energía cinética de un electrón (masa $= 9{,}109 \times \times 10^{-31}$ kg) moviéndose a una velocidad de 10^6 m s^{-1}. Repetir para un protón (masa $= 1{,}675 \times 10^{-27}$ kg).

8.20 Hallar la velocidad de un electrón que llega a la pantalla de un tubo de televisión con una energía de $1{,}8 \times \times 10^4$ eV.

8.21 Hallar la velocidad de un protón que sale de un acelerador de partículas con 3×10^5 eV de energía.

8.22 Cuando E_k es la energía cinética en eV y v la velocidad en m s^{-1}, demostrar que están relacionadas por $E_k = 2{,}843 \times \times 10^{-12} v^2$ para el electrón y $E_k = 5{,}228 \times \times 10^{-9} v^2$ para el potrón.

8.23 La fuerza actuante sobre un cuerpo de 10 kg de masa es $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{u}_x(10 + 2t)$ N, donde t está en segundos. (a) Determinar los cambios de momentum y de velocidad del cuerpo después de 4 s, así como el impulso recibido. (b) ¿Por cuánto tiempo debería actuar la fuerza sobre el cuerpo para que el impulso sea de 200 N s? Responder ambas preguntas para un cuerpo que está inicialmente en reposo y para otro con una velocidad inicial $-\boldsymbol{u}_y(6)$ m s^{-1}.

8.24 Una masa de 10 kg se mueve bajo la acción de la fuerza $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{u}_x(5t) + \boldsymbol{u}_y(3t^2 - 1)$ N. Cuando $t = 0$ el cuerpo está en reposo en el origen. (a) Hallar el momentum y la energía cinética del cuerpo cuando $t = 10$ s. (b) Computar el impulso y el trabajo efectuado por la fuerza de $t = 0$ a $t = 10$ s. Comparar con las respuestas en (a).

8.25 Una masa de 20 kg se mueve bajo la influencia de la fuerza $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{u}_x(100t)$ N, donde t se mide en segundos. Si, para $t = 2$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_x(3)$ m s^{-1}, determine (a) el impulso dado a la partícula durante el intervalo 2 s $< t <$ 10 s, y (b) el momentum de la masa cuando $t = 10$ s.

(c) Pruebe que el impulso es igual al cambio de momentum de la masa en el intervalo dado. (d) Encuentre el trabajo efectuado sobre la partícula y, (e) su energía cinética cuando $t = 10$ s. (f) Demuestre que el cambio de energía cinética es igual al trabajo efectuado.

8.26 Repetir el problema anterior para $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_y(3t)$ m s^{-1} cuando $t = 2$ s.

8.27 Sobre una partícula actúa la fuerza $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{u}_x(y^2 - x^2) + \boldsymbol{u}_y(3xy)$. Hallar el trabajo efectuado por la fuerza al moverse la partícula del punto (0, 0) al punto (2,4) siguiendo las siguientes trayectorias : (a) a lo largo del eje X desde (0,0 hasta (2,0) y, paralelamente al eje Y, hasta (2,4) ; (b) a lo largo del eje Y desde (0,0) hasta (0,4) y, paralelamente al eje X, hasta (2,4), (c) a lo largo de la recta que une ambos puntos ; (d) a lo largo de la parábola $y = x^2$. ¿Es conservativa esta fuerza?

8.28 Repetir el problema anterior para la fuerza $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{u}_x(2xy) + \boldsymbol{u}_y(x^2)$.

8.29 Se da $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{u}_x(7) - \boldsymbol{u}_y(6)$N. (a) Computar el trabajo efectuado cuando una partícula va del origen a $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{u}_x(-3) + \boldsymbol{u}_y(4) + \boldsymbol{u}_z(16)$ m. ¿Es necesario especificar la trayectoria seguida por la partícula? (b) Computar la potencia promedio si tomó 0,6 s el ir de un lugar al otro. Exprese su respuesta en watts y caballos-vapor. (c) Si $\boldsymbol{F}$ es la única fuerza actuante, calcular el cambio de la energía cinética.

8.30 La fuerza en el problema anterior es conservativa, ya que es constante. Calcular la diferencia de energía potencial entre los puntos extremos. Determinar la energía potencial en el punto $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{u}_x(7) + \boldsymbol{u}_y(16) + \boldsymbol{u}_z(-42)$ m.

8.31 Una partícula se mueve bajo la acción de una fuerza atractiva que varía con el inverso del cuadrado : $F = -k/r^2$. La trayectoria es una circunferencia de radio r. Demostrar que la energía total es $E = -k/2r$, que la velocidad es $v = (k/mr)^{1/2}$. y que el momentum angular es $L = (mkr)^{1/2}$.

8.32 Un plano inclinado tiene 13 m de largo y su base 12 m. Un cuerpo de 0,80 kg de masa resbala desde arriba con una velocidad inicial de 100 cm s^{-1}. ¿Cuáles son su velocidad y su energía cinética al llegar al final del plano?

8.33 Representar las energías potencial y cinética como función de (a) el tiempo y (b) la altura, para un cuerpo que cae a partir del reposo desde una altura h. Verificar que la suma de las ordenadas correspondientes es constante.

8.34 Se lanza verticalmente hacia arriba un cuerpo de 20 kg de masa con una velocidad de 50 m s^{-1}. Calcular (a) los valores iniciales de E_k, E_p y E ; (b) E_k y E_p después de 3 s ; (c) E_k y E_p a 100 m de altura ; y, (d) la altura del cuerpo cuando E_k es reducida a un 80 % de su valor inicial.

8.35 Una bola de 0,40 kg es lanzada horizontalmente desde la cima de una colina, a 120 m de altura, con una velocidad de 6 m s^{-1}. Calcular (a) la energía cinética inicial de la bola, (b) su energía potencial inicial, (c) su energía cinética al chocar con el suelo, y (d) su velocidad en esta última circunstancia.

8.36 Una bomba de 10 kg de masa es soltada desde un avión que vuela horizontalmente a 270 km hr^{-1}. Si el avión está a 100 m de altura, calcular (a) la energía cinética inicial de la bomba, (b) su energía potencial inicial, (c) su energía total, (d) su velocidad al llegar al suelo, y (e) sus energías potencial y cinética 10 s después de haber sido soltada.

8.37 Utilizando solamente la conservación de la energía, calcular la velocidad de la bomba en el problema anterior cuando se halla a 50 m sobre el suelo y su altitud cuando la energía cinética ha aumentado un 30 % sobre su valor inicial.

8.38 Resolver el Problema 8.34 para el caso en que se lance el cuerpo en una dirección de 70° sobre la horizontal.

8.39 Un muchacho de masa m está sentado sobre un montículo hemisférico de nieve como se muestra en la Fig. 8-25. Si empieza a resbalar desde el reposo (suponiendo el hielo perfectamente liso) ¿en qué punto P deja el muchacho de tener contacto con el hielo?

8.40 Tres cañones disparan con la misma velocidad inicial (Fig. 8-26) de

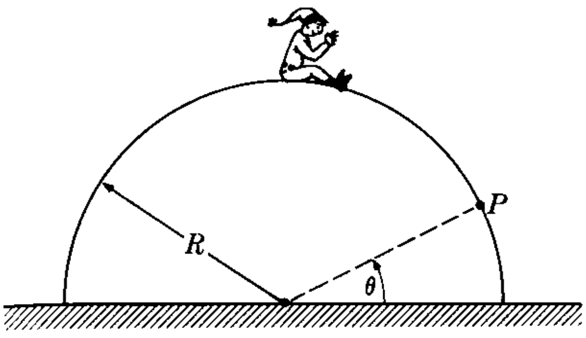

Figura 8-25

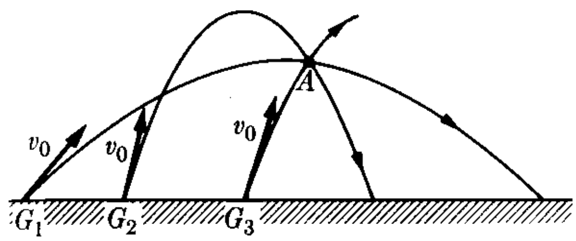

Figura 8-26

modo que las balas pasan todas por el mismo punto A (no necesariamente en el mismo instante). Copiar la Fig. 8-26 y dibujar los vectores velocidad en A. Basando sus cálculos en consideraciones de energía, determinar la relación entre las magnitudes de las velocidades en A. A partir de su respuesta puede Ud. concluir que, usando nada más que la conservación de la energía, es posible determinar la dirección del movimiento? ¿Por qué?

8.41 Un cuerpo de 0,5 kg de masa es soltado desde una altura de 1 m sobre un pequeño resorte vertical sujeto al suelo y cuya constante es $k = 2000$ N m^{-1}. Calcular la máxima deformación del resorte.

8.42 El cuerpo A en la Fig. 8-27 tiene una masa de 0,5 kg. Partiendo del reposo resbala 3 m sobre un plano muy liso, inclinado 45° sobre la horizontal, hasta que choca con el resorte M, cuyo extremo B está fijo al final del plano, la constante del resorte es $k = 400$ N m^{-1}. Calcular su máxima deformación.

8.43 Un cuerpo de 5 kg de masa cuelga de un resorte cuya constante elástica es 2×10^3 N m^{-1}. Si se permite que el resorte se expanda lentamente, ¿a qué distancia llegará a desplazarse el cuerpo? Se suelta ahora el cuerpo para que caiga libremente. Hallar (a) la aceleración inicial y (b) la aceleración y la velocidad cuando ha caído 0,010 m, 0,0245 m y 0,030 m. Hacer consideraciones energéticas siempre que sea posible.

8.44 En la molécula NH_3 el átomo N ocupa el vértice de un tetraedro con tres átomos H en la base (ver Fig. 2-3). Evidentemente, el átomo N tiene dos posiciones simétricas de equilibrio estable. Dibujar esquemáticamente una curva de energía potencial para el átomo N en función de su distancia a la base del tetraedro y discutir su posible movimiento en términos de la energía total.

8.45 En la molécula de etano (C_2H_6), los dos grupos CH_3 son tetraedros con un átomo C en el vértice (Fig. 8-28). Dichos grupos pueden rotar relativamente alrededor de la línea que une los dos átomos de carbono. Consideraciones de simetría sugieren que haya dos conjuntos de posiciones de equilibrio para este movimiento ; un conjunto consiste

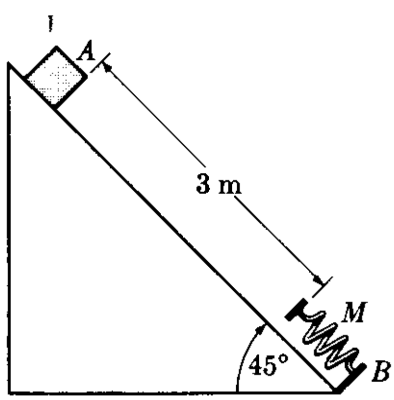

Figura 8-27

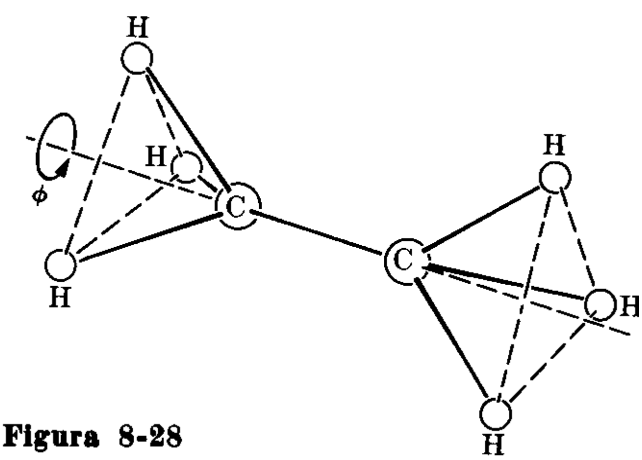

Figura 8-28

de posiciones estables y el otro de inestables. Determinar dichas posiciones y bosquejar esquemáticamente la energía potencial como función del ángulo ϕ entre 0 y 2π. Discutir el posible movimiento de rotación para diferentes valores de la energía total.

8.46 Dibujar, como en la Fig. 8-19, $E_{p,eff}$ para $E_p(r) = -1/r$ y (a) $E_{p,c} = 1/2r^2$, (b) $E_{p,c} = 2/r^2$, donde todas las energías están en J y r está en m. Determinar la posición de los mínimos de $E_{p,eff}$ en cada caso. Medir la energía necesaria para pasar del mínimo de la primera curva al mínimo de la segunda.

8.47 Un trineo de 20 kg. de masa se desliza colina abajo, empezando a una altura de 20 m. El trineo parte del reposo y tiene una velocidad de 16 m s^{-1} al llegar al final de la pendiente. Calcular la pérdida de energía debida al frotamiento.

8.48 Una bola de 5 kg de masa que es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m s^{-1}, alcanza una altura de 15 m. Calcular la pérdida de energía debida a la resistencia del aire.

8.49 Un tren que parte del reposo viaja 300 m camino abajo por una pendiente del 1 %. Con el impulso así adquirido, sube 60 m por una pendiente del 2 % hasta detenerse. Calcular la fuerza de resistencia al movimiento del tren. (Suponiendo que α y β son los ángulos con la horizontal, tg $\alpha = 0{,}01$ y tg $\beta = 0{,}02$).

8.50 Un cuerpo de masa m se desliza hacia abajo por un plano de inclinación α. El coeficiente de fricción es f. Hallar la rapidez con que se disipan las energías potencial y cinética combinadas.

8.51 Resolver el ejemplo 8.12 sustituyendo valores apropiados para v e y como funciones de t (obtenidas del ejemplo 7.8) en la expresión $d/dt\,(E_k + E_p) = d/dt\,(\frac{1}{2}mv^2 + mgy)$. Demostrar que el resultado es el mismo ya obtenido en el ejemplo 8.12.

8.52 Un cuerpo de 8 kg de masa reposa sobre un plano horizontal estando en contacto con el extremo libre de un resorte también horizontal cuya constante elástica es de 10^3 N m^{-1}. El otro extremo del resorte está fijo en una pared vertical. Cuando se empuja el cuerpo hacia la pared, el resorte se comprime 15 cm. Al soltarlo entonces, el cuerpo es proyectado horizontalmente por acción del resorte. La fuerza de fricción entre el cuerpo y el plano es constante y vale 5 N. Calcular (a) la velocidad del cuerpo en el instante en que el resorte recupera su longitud original, y (b) la distancia recorrida por el cuerpo antes de detenerse, suponiendo que la acción del resorte sobre el cuerpo termina cuando aquél recobra su longitud normal. Discutir la variación de las energías cinética y potencial del sistema cuerpo-resorte durante todo el proceso.

8.53 Aplicar el teorema del virial para obtener la energía total de un cuerpo en movimiento bajo una fuerza atractiva $F = -k/r^2$. Comparar la respuesta con los resultados del Problema 8.31.

8.54 Una partícula se mueve en un campo de fuerzas descrito por una de las siguientes funciones de energía potencial : (a) $E_p(x) = ax^n$, (b) $E_p = by^n$, (c) $E_p = cxy$, (d) $E_p = cxyz$, (e) $E_p = k(x^2 + y^2 + z^2)$. En cada caso expresar el campo de fuerza en forma vectorial.

8.55 Una partícula está sujeta a una fuerza asociada con la energía potencial $E_p(x) = 3x^2 - x^3$. (a) Trazar un gráfico de $E_p(x)$. (b) Determinar la dirección de la fuerza en rangos apropiados de la variable x. (c) Discutir los posibles movimientos de la partícula para diferentes valores de su energía total. Hallar sus posiciones de equilibrio (estable e inestable).

8.56 La interacción entre dos nucleones puede ser representada con cierta aproximación por el *potencial de Yukawa* $E_p(r) = -V_0\,(r_0/r)e^{-r/r_0}$, donde V_0 vale alrededor de 50 MeV y r_0 1,5 × 10^{-15} m. Hallar la fuerza entre los dos nucleones como función de su separación. Hallar el valor de la fuerza para $r = r_0$. Estimar el valor de r para el cual la fuerza tiene el 1 % del valor que posee para $r = r_0$.

8.57 En vez de la interacción de Yukawa, considere una interacción de la forma $E_p(r) = -V_0(r_0/r)$, y repita los mismos cálculos. ¿Qué concluye Ud. acerca del efecto del factor e^{-r/r_0} en el alcance de la fuerza?

8.58 Probar que cuando una fuerza es conservativa, $\partial F_x/\partial y = \partial F_y/\partial x$, $\partial F_y/\partial z = \partial F_z/\partial y$, y $\partial F_z/\partial x = \partial F_x/\partial z$. Se puede probar que la recíproca es también verdadera, y que por tanto se tiene así una importante manera de determinar si un campo de fuerza es conservativo. Sobre esta base, verificar cuáles de las siguientes fuerzas son conservativas: (a) $\boldsymbol{u}_x x^n$, (b) $\boldsymbol{u}_x y^n$, (c) $\boldsymbol{u}_x(x^2 - y^2) + \boldsymbol{u}_y(3xy)$, (d) $\boldsymbol{u}_x(2xy) + \boldsymbol{u}_y(x^2)$, (e) $\boldsymbol{u}_x yz + \boldsymbol{u}_y zx + \boldsymbol{u}_z xy$, (f) $\boldsymbol{u}_x x + \boldsymbol{u}_y y + \boldsymbol{u}_z z$.

8.59 Demostrar que si la fuerza aplicada a un cuerpo es $\boldsymbol{F} = k\,\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$, donde $\boldsymbol{u}$ es un vector unitario arbitrario, la energía cinética permanece constante. ¿Cuál es el trabajo hecho por la fuerza? Describir la naturaleza del movimiento resultante.