

# MOVIMIENTO RELATIVO

*6.1 Introducción*

*6.2 Velocidad relativa*

*6.3 Movimiento relativo de traslación uniforme*

*6.4 Movimiento relativo rotacional uniforme*

*6.5 Movimiento relativo con respecto a la tierra*

*6.6 Transformación de Lorentz*

*6.7 Transformación de velocidades*

*6.8 Consecuencias de la transformación de Lorentz*

## 6.1 Introducción

En el capítulo anterior indicamos que el movimiento es un concepto relativo porque debe siempre referirse a un sistema particular de referencia, escogido por el observador. Como diferentes observadores pueden utilizar sistemas de referencias distintos, es importante conocer la forma en que están relacionadas las observaciones hechas por diferentes observadores. Por ejemplo, la mayor parte de las observaciones hechas en la tierra están referidas a un sistema de referencia situado en ella, y por lo tanto, moviéndose con la tierra. Los astrónomos aún prefieren referir el movimiento de un cuerpo celeste a las llamadas *estrellas fijas*. En física atómica el movimiento de los electrones se determina con respecto al núcleo. Un experimentador usualmente escoge un sistema de referencia en el cual la toma de los datos y el análisis se realizan más fácilmente.

La posibilidad de definir un *sistema absoluto* de referencia en reposo relativo con respecto al espacio *vacío* es un asunto que ha sido discutido durante siglos por físicos y filósofos. Cuando se supuso que el espacio vacío estaba "lleno" de una sustancia imaginaria llamada *éter*, con propiedades algo contradictorias e imposibles, el sistema absoluto de referencia se definió como aquel que se encontraba en reposo con respecto al éter. Sin embargo, una vez que la gente descartó la idea artificial e innecesaria del éter, se hizo imposible definir tal sistema absoluto, ya que en el espacio no hay elementos que puedan servir como puntos de referencia. Como veremos en este capítulo, este asunto no tiene en la actualidad mayor importancia.

## 6.2 Velocidad relativa

Consideremos dos objetos  $A$  y  $B$  y un observador  $O$ , utilizando como sistema de referencia los ejes  $XYZ$  (Fig. 6-1). Las velocidades de  $A$  y  $B$  con respecto a  $O$  son

$$\mathbf{V}_A = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt}, \quad \mathbf{V}_B = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt}. \quad (6.1)$$

Las velocidades de  $B$  con respecto a  $A$  y de  $A$  con respecto a  $B$  están definidas por

$$\mathbf{V}_{BA} = \frac{d\mathbf{r}_{BA}}{dt}, \quad \mathbf{V}_{AB} = \frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt}, \quad (6.2)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{BA} &= \overrightarrow{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A, \\ \mathbf{r}_{AB} &= \overrightarrow{BA} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B. \end{aligned} \quad (6.3)$$

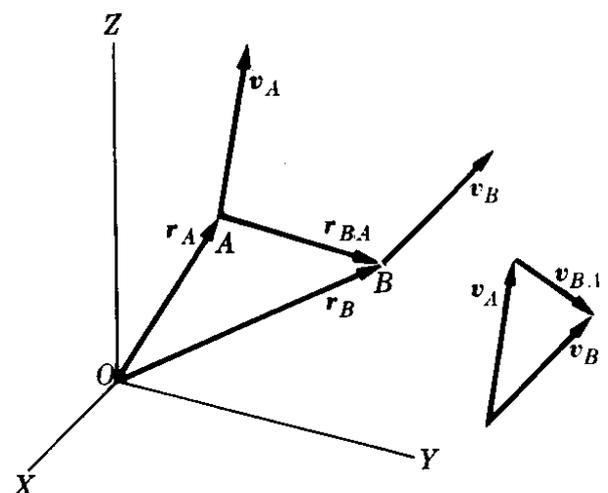


Fig. 6-1. Definición de velocidad relativa.

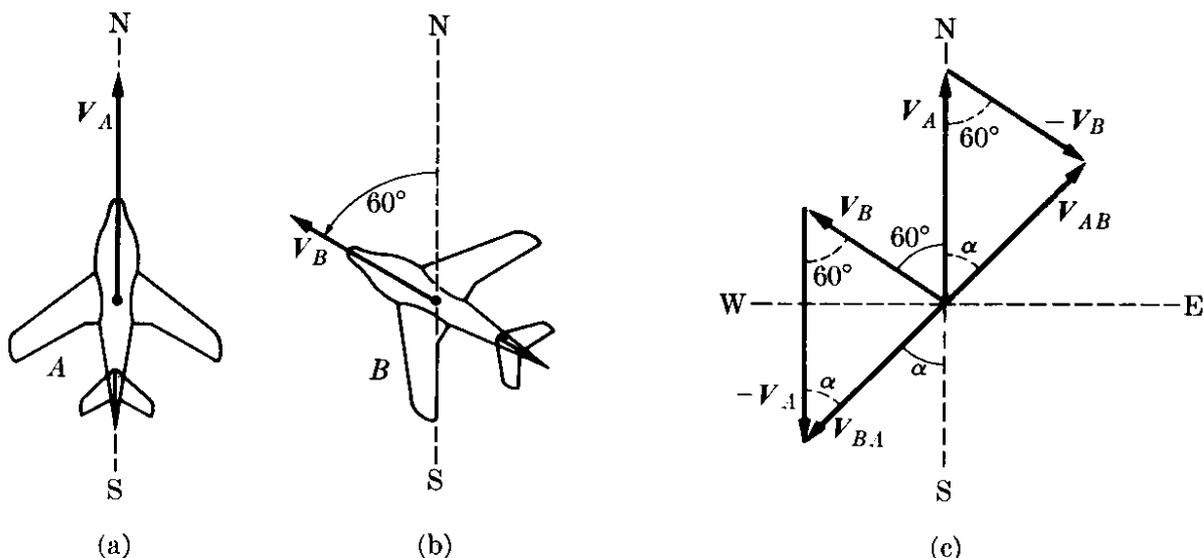


Figura 6-2

Nótese que, considerando  $\mathbf{r}_{AB} = -\mathbf{r}_{BA}$ , también tenemos que

$$\mathbf{V}_{BA} = -\mathbf{V}_{AB}. \quad (6.4)$$

En otras palabras, la velocidad de  $B$  con respecto a  $A$  es igual y opuesta a la velocidad de  $A$  con respecto a  $B$ . Derivando la ec. (6.3) con respecto al tiempo, resulta:

$$\frac{d\mathbf{r}_{BA}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_A}{dt}, \quad \frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_B}{dt},$$

o, usando las ecs. (6.1) y (6.2), tenemos

$$\mathbf{V}_{BA} = \mathbf{V}_B - \mathbf{V}_A, \quad \mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_A - \mathbf{V}_B. \quad (6.5)$$

Por consiguiente, para obtener la velocidad relativa de dos cuerpos, se restan sus velocidades con respecto al observador. Derivando nuevamente la ec. (6.5), encontramos que

$$\frac{d\mathbf{V}_{BA}}{dt} = \frac{d\mathbf{V}_B}{dt} - \frac{d\mathbf{V}_A}{dt},$$

con una expresión similar para  $d\mathbf{V}_{AB}/dt$ . El primer término se denomina la aceleración de  $B$  con respecto a  $A$ , y se designa por  $\mathbf{a}_{BA}$ . Los otros términos son las aceleraciones de  $B$  y de  $A$  con respecto a  $O$ , respectivamente. Luego

$$\mathbf{a}_{BA} = \mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A \quad \text{y} \quad \mathbf{a}_{AB} = \mathbf{a}_A - \mathbf{a}_B. \quad (6.6)$$

**EJEMPLO 6.1.** Un aeroplano  $A$  (Fig. 6-2) vuela hacia el Norte a 300 millas por hora con respecto a la tierra. Simultáneamente otro avión  $B$  vuela en la dirección  $N 60^\circ W$  a 200 millas por hora con respecto a la tierra. Encontrar la velocidad de  $A$  con respecto a  $B$  y de  $B$  con respecto a  $A$ .

**Solución:** En la Fig. 6-2, las velocidades de los aviones A y B con respecto a la tierra se han representado a la izquierda. A la derecha tenemos la velocidad de A con respecto a B, esto es,  $V_{AB} = V_A - V_B$  y de B con respecto a A, esto es  $V_{BA} = V_B - V_A$ . Podemos notar que  $V_{AB} = -V_{BA}$ , en concordancia con la ec. (6.4).

Para calcular  $V_{AB}$ , usamos la ec. (3.6), notando que el ángulo  $\theta$  entre  $V_A$  y  $V_B$  es de  $60^\circ$ . Así

$$V_{AB} = \sqrt{300^2 + 200^2 - 2 \times 300 \times 200 \times \cos 60^\circ} = 264,6 \text{ mi hr}^{-1}.$$

Para obtener la dirección de  $V_{AB}$ , usamos la ley de los senos ec. (3.4),

$$\frac{V_B}{\sin \alpha} = \frac{V_{AB}}{\sin 60^\circ} \quad \text{ó} \quad \sin \alpha = \frac{V_B \sin 60^\circ}{V_{AB}} = 0,654,$$

obteniéndose  $\alpha = 40,7^\circ$ . Entonces, a un pasajero en el avión B le parece como si el avión A se desplazara a 264 millas/hr en la dirección N  $40,7^\circ$  E. La velocidad relativa  $V_{BA}$  tiene la misma magnitud 264,6 mi/hr pero en la dirección opuesta, S  $40,7^\circ$  W.

### 6.3 Movimiento relativo de traslación uniforme

Consideremos dos observadores O y O' que se mueven, uno con respecto al otro, con movimiento de traslación uniforme. Esto es, los observadores no rotan uno con respecto al otro. Por ello, el observador O ve al observador O' moviéndose con velocidad  $v$ , mientras que O' ve a O moviéndose con velocidad  $-v$ . Estamos interesados en comparar sus descripciones del movimiento de un objeto, como, por ejemplo, cuando un observador se encuentra sobre la plataforma de una estación de ferrocarril y el otro está situado en un tren que se desplaza en línea recta, y ambos observadores están mirando el vuelo de un avión que pasa por encima de ellos.

Escogemos, por simplicidad, los ejes X y X' a lo largo de la línea del movimiento relativo (Fig. 6-3) y los ejes YZ e Y'Z' paralelos entre sí; los ejes de coordenadas permanecerán siempre paralelos debido a la ausencia de rotación relativa. Supondremos también que para  $t = 0$ , O y O' coinciden, de modo que si la velocidad relativa  $v$  es constante, podemos escribir

$$\vec{OO'} = vt \quad \text{y} \quad v = u_x v.$$

Considerando ahora una partícula en A. De la Fig. 6-3, vemos que  $\vec{OA} = \vec{OO'} + \vec{O'A}$  y como  $\vec{OA} = r$ ,  $\vec{O'A} = r'$ , y  $\vec{OO'} = vt$ , los vectores posición de A medidos por O y O' están relacionados por

$$r' = r - vt. \quad (6.7)$$

La ecuación vectorial puede expresarse en

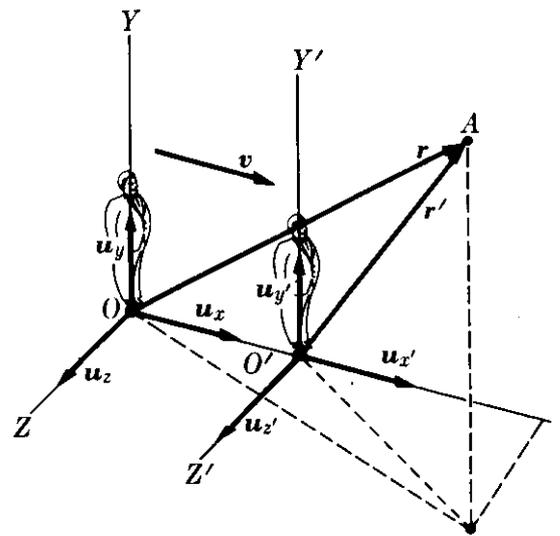


Fig. 6-3. Sistemas de referencia en movimiento relativo de traslación uniforme.

sus tres componentes, tomando en consideración el hecho de que  $\mathbf{v}$  es paralela a  $OX$ . Por lo tanto

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (6.8)$$

Hemos añadido  $t' = t$  a las tres ecuaciones espaciales para dar énfasis al hecho de que estamos suponiendo que los dos observadores están usando el mismo tiempo; esto es, suponemos que las mediciones de tiempo son independientes del movimiento del observador. Esto parece muy razonable, pero es sólo una suposición, que puede ser desvirtuada en forma experimental.

El conjunto de ecs. (6.8) o la simple ecuación vectorial (6.7) combinadas con  $t' = t$ , son denominadas una *transformación Galileana*.

La velocidad  $\mathbf{V}$  de  $A$  con respecto a  $O$  se define por

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = u_x \frac{dx}{dt} + u_y \frac{dy}{dt} + u_z \frac{dz}{dt}$$

y la velocidad  $\mathbf{V}'$  de  $A$  con respecto a  $O'$  es

$$\mathbf{V}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = u_{x'} \frac{dx'}{dt} + u_{y'} \frac{dy'}{dt} + u_{z'} \frac{dz'}{dt}.$$

Nótese que no escribimos  $d\mathbf{r}'/dt'$  debido a que hemos supuesto que  $t = t'$  y por lo tanto  $d\mathbf{r}'/dt'$  es lo mismo que  $d\mathbf{r}'/dt$ . Derivando la ec. (6.7) con respecto al tiempo y notando que  $\mathbf{v}$  es constante, tenemos

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} - \mathbf{v}, \quad (6.9)$$

o notando que  $V_x = dx/dt$ ,  $V'_{x'} = dx'/dt$ , etc., podemos separar la ec. (6.9) en sus tres velocidades componentes:

$$V'_{x'} = V_x - v, \quad V'_{y'} = V_y, \quad V'_{z'} = V_z. \quad (6.10)$$

Estas pueden también obtenerse directamente derivando las ecs. (6.8), las ecs. (6.9) o (6.10) dan la regla Galileana para comparar la velocidad de un cuerpo medida por dos observadores en movimiento relativo de traslación. Por ejemplo, si  $A$  se mueve paralelamente al eje  $OX$ , tenemos simplemente

$$V' = V - v, \quad (6.11)$$

siendo las otras componentes nulas. Pero si  $A$  se mueve paralelamente al eje  $OY$ ,  $V_x = V_z = 0$ ,  $V_y = V$ , luego  $V'_{x'} = -v$  y  $V'_{y'} = V$ ,  $V'_{z'} = 0$ , de modo que

$$V' = \sqrt{V^2 + v^2}. \quad (6.12)$$

Las aceleraciones de  $A$  con respecto a  $O$  y  $O'$  son  $\mathbf{a} = d\mathbf{V}/dt$  y  $\mathbf{a}' = d\mathbf{V}'/dt$  respectivamente. Nótese nuevamente que usamos el mismo tiempo  $t$  en ambos casos. A partir de la ec. (6.9) notando que  $d\mathbf{v}/dt = 0$  ya que  $\mathbf{v}$  es constante, obtenemos

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d\mathbf{V}'}{dt} \quad \text{ó} \quad \mathbf{a}' = \mathbf{a}, \quad (6.13)$$

la cual, expresada en coordenadas rectangulares es

$$a'_{x'} = a_x, \quad a'_{y'} = a_y \quad \text{y} \quad a'_{z'} = a_z. \quad \text{Transformación Galileo (6.14)}$$

En otras palabras, ambos observadores miden la misma aceleración. Esto es, *la aceleración de una partícula es la misma para todos los observadores en movimiento relativo de traslación uniforme*. Este resultado nos ofrece un ejemplo de una cantidad física — la aceleración de una partícula — que parece ser independiente del movimiento de un observador; en otras palabras, hemos encontrado que *la aceleración permanece invariante cuando se pasa de un sistema de referencia a otro que se encuentra en movimiento relativo de traslación uniforme*. Es la primera vez que encontramos una cantidad física que permanece invariante bajo una transformación. Más adelante encontraremos otras cantidades físicas que se comportan de la misma manera. Este resultado, como veremos, tiene una profunda influencia en la formulación de las leyes de la física.

**EJEMPLO 6.2.** La velocidad del sonido en aire quieto a 25°C (67°F) es de 358 m s<sup>-1</sup>. Encontrar la velocidad medida por un observador que se mueve a 90 km hr<sup>-1</sup> (a) alejándose de la fuente, (b) acercándose hacia la fuente, (c) perpendicular a la

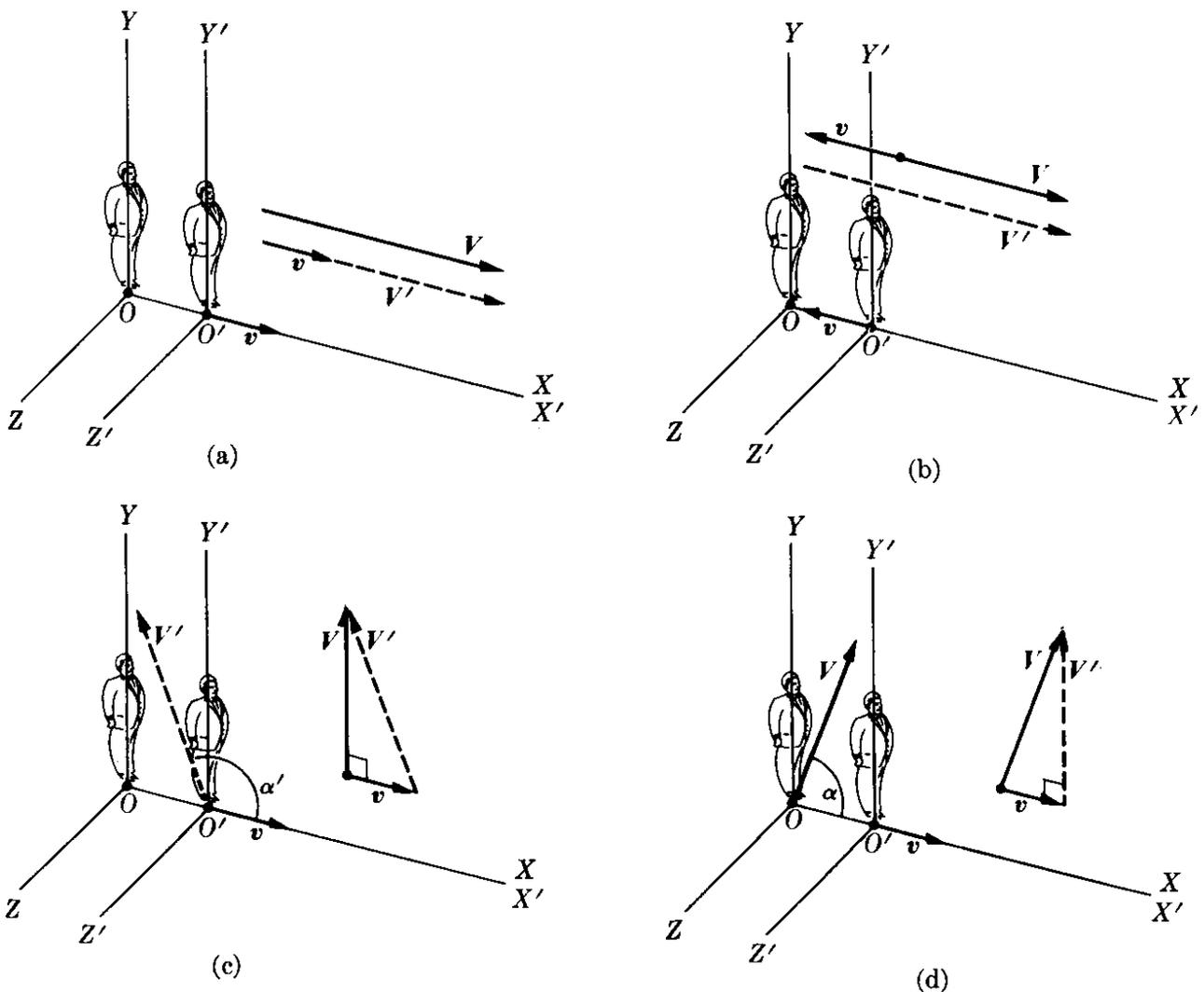


Figura 6-4

dirección de propagación en el aire, (d) en una dirección tal que el sonido parece propagarse perpendicularmente a la dirección del observador. Suponer que la fuente se encuentra en reposo relativo a la tierra.

**Solución:** Usemos un sistema de referencia  $XYZ$  (Fig. 6-4) fijo relativo a la tierra, y por ello en reposo relativo con respecto al aire, y un sistema  $X'Y'Z'$  que se mueve con el observador, con los ejes  $X$  y  $X'$  paralelos a la velocidad del observador, como en la Fig. 6-3. Con respecto a  $XYZ$ , la fuente de sonido se encuentra en  $O$ , la velocidad del observador  $O'$  es  $v = 90 \text{ km hr}^{-1} = 25 \text{ m s}^{-1}$ , y la velocidad del sonido es  $V = 358 \text{ m s}^{-1}$ . La velocidad del sonido, con respecto a  $X'Y'Z'$  medido por el observador  $O'$  es  $V'$ . Aplicando la ecuación (6.9) o la (6.10) tenemos para el caso (a)  $V' = V - v = 333 \text{ m s}^{-1}$ . En el caso (b) notamos que  $O'$  se mueve a lo largo de la dirección negativa del eje  $X$ . Luego podemos escribir que  $v = -u_x v$ , transformando la ec. (6.11) en  $V' = V + v = 383 \text{ m s}^{-1}$ .

Para la situación (c) usamos la ec. (6.12) de modo que  $V' = \sqrt{V^2 + v^2} = 358,9 \text{ m s}^{-1}$ . Para el observador en movimiento, el sonido parece propagarse en una dirección que hace un ángulo  $\alpha'$  con el eje  $X'$  tal que

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{V'_{y'}}{V'_{x'}} = \frac{V}{-v} = -15,32 \quad \text{ó} \quad \alpha' = 93,7^\circ.$$

Finalmente, en el caso (d), la dirección de propagación del sonido en el aire es tal que desde el punto de vista de  $O'$  se mueve en la dirección  $Y'$ . Por ello  $V'_{x'} = 0$ ,  $V'_{y'} = V'$ , y  $V'_{z'} = 0$ . Luego, usando la ec. (6.10) tenemos  $0 = V_x - v$  ó  $V_x = v$  y  $V' = V_y$ . Por consiguiente  $V^2 = V_x^2 + V_y^2 = v^2 + V'^2$  ó  $V' = \sqrt{V^2 - v^2} = 357,1 \text{ m s}^{-1}$ . En este caso el sonido se propaga a través del aire quieto en una dirección que hace un ángulo  $\alpha$  con el eje  $X$  de modo que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V_y}{V_x} = \frac{V'}{v} = 14,385 \quad \text{ó} \quad \alpha = 86,0^\circ.$$

#### 6.4 *Movimiento relativo rotacional uniforme*

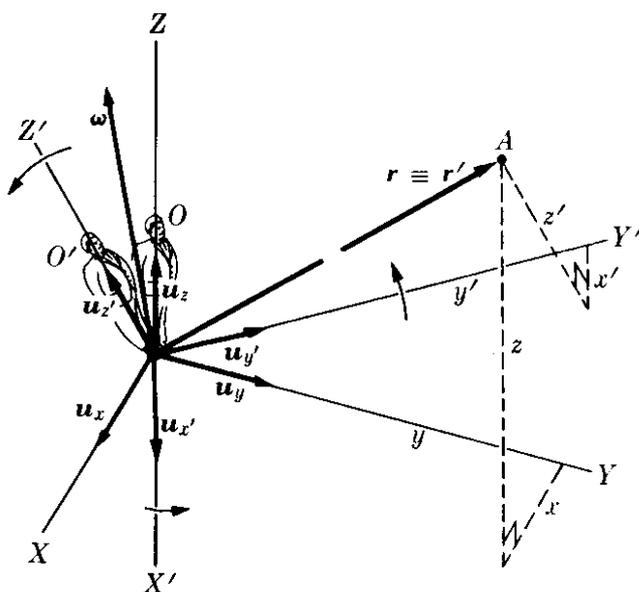


Fig. 6-5. Sistemas de referencia en movimiento relativo de rotación uniforme.

Consideremos ahora dos observadores  $O$  y  $O'$  que rotan uno con respecto al otro pero sin movimiento de traslación relativo. Por simplicidad supondremos que  $O$  y  $O'$  se encuentran en la misma región del espacio y que cada uno de ellos usa un sistema de referencia fijo a sí mismo pero con origen común. Por ejemplo, el observador  $O$ , quien utiliza el sistema  $XYZ$  (Fig. 6-5), nota que el sistema  $X'Y'Z'$  fijo a  $O'$  está rotando con velocidad angular  $\omega$ . Para  $O'$ , la situación es justamente inversa;  $O'$  observa el sistema  $XYZ$  rotando con velocidad an-

gular —  $\omega$ . El vector posición  $\mathbf{r}$  de la partícula  $A$  referido a  $XYZ$  es

$$\mathbf{r} = u_x x + u_y y + u_z z, \quad (6.15)$$

y, por consiguiente, la velocidad de la partícula  $A$  medida por  $O$  con respecto a su sistema de referencia  $XYZ$  es

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = u_x \frac{dx}{dt} + u_y \frac{dy}{dt} + u_z \frac{dz}{dt}. \quad (6.16)$$

Similarmente, el vector posición de  $A$  referido a  $X'Y'Z'$  es

$$\mathbf{r} = u_{x'} x' + u_{y'} y' + u_{z'} z', \quad (6.17)$$

donde, debido a que los orígenes coinciden, el vector  $\mathbf{r}$  es el mismo que el de la ec. (6.15); esa es la razón por la cual no hemos escrito  $\mathbf{r}'$ . La velocidad de  $A$ , medida por  $O'$  con respecto a su propio sistema de referencia  $X'Y'Z'$  es

$$\mathbf{V}' = u_{x'} \frac{dx'}{dt} + u_{y'} \frac{dy'}{dt} + u_{z'} \frac{dz'}{dt}. \quad (6.18)$$

Al derivar la ec. (6.17) el observador  $O'$  ha supuesto que su sistema  $X'Y'Z'$  no está rotando, y por lo tanto ha considerado los vectores unitarios como constantes en dirección. Sin embargo, el observador  $O$  tiene el derecho de decir que, para él, el sistema  $X'Y'Z'$  está rotando y que, por consiguiente, los vectores unitarios  $u_{x'}$ ,  $u_{y'}$  y  $u_{z'}$ , no tienen dirección constante de modo que al calcular la derivada con respecto al tiempo de la ec. (6.17), debe escribirse

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= u_{x'} \frac{dx'}{dt} + u_{y'} \frac{dy'}{dt} + u_{z'} \frac{dz'}{dt} + \\ &+ \frac{du_{x'}}{dt} x' + \frac{du_{y'}}{dt} y' + \frac{du_{z'}}{dt} z'. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Ahora bien los extremos de los vectores  $u_{x'}$ ,  $u_{y'}$  y  $u_{z'}$  están (por suposición) en movimiento de rotación uniforme relativo a  $O$ , con velocidad angular  $\omega$ . En otras palabras  $du_{x'}/dt$  es la velocidad de un punto situado a una distancia unitaria de  $O$  y que se mueve con movimiento circular uniforme con velocidad angular  $\omega$ . Por consiguiente, usando la ec. (5.48), tenemos

$$\frac{du_{x'}}{dt} = \omega \times u_{x'}, \quad \frac{du_{y'}}{dt} = \omega \times u_{y'}, \quad \frac{du_{z'}}{dt} = \omega \times u_{z'}.$$

En concordancia, de la ec. (6.19) podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{du_{x'}}{dt} x' + \frac{du_{y'}}{dt} y' + \frac{du_{z'}}{dt} z' &= \omega \times u_{x'} x' + \omega \times u_{y'} y' + \omega \times u_{z'} z' \\ &= \omega \times (u_{x'} x' + u_{y'} y' + u_{z'} z') \\ &= \omega \times \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Introduciendo este resultado en la ec. (6.19) y usando las ecs. (6.16) y (6.18), obtenemos finalmente

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (6.21)$$

Esta expresión da la relación entre las velocidades  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{V}'$  de  $A$ , medidas por dos observadores  $O$  y  $O'$  en movimiento relativo de rotación uniforme.

Para obtener la relación entre las aceleraciones, procedemos de una manera similar. La aceleración de  $A$ , medida por  $O$  con respecto a  $XYZ$  es:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = u_x \frac{dV_x}{dt} + u_y \frac{dV_y}{dt} + u_z \frac{dV_z}{dt}. \quad (6.22)$$

La aceleración de  $A$ , medida por  $O'$  respecto a  $X'Y'Z'$ , cuando él ignora la rotación es:

$$\mathbf{a}' = u_{x'} \frac{dV'_{x'}}{dt} + u_{y'} \frac{dV'_{y'}}{dt} + u_{z'} \frac{dV'_{z'}}{dt}. \quad (6.23)$$

Cuando derivamos la ec. (6.21) con respecto al tiempo  $t$ , recordando que hemos supuesto  $\boldsymbol{\omega}$  constantes, obtenemos

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d\mathbf{V}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (6.24)$$

Ahora, ya que  $\mathbf{V}' = u_{x'}V'_{x'} + u_{y'}V'_{y'} + u_{z'}V'_{z'}$ , obtenemos por derivación

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}'}{dt} &= u_{x'} \frac{dV'_{x'}}{dt} + u_{y'} \frac{dV'_{y'}}{dt} + u_{z'} \frac{dV'_{z'}}{dt} \\ &\quad + \frac{du_{x'}}{dt} V'_{x'} + \frac{du_{y'}}{dt} V'_{y'} + \frac{du_{z'}}{dt} V'_{z'}. \end{aligned}$$

Los tres primeros términos son justamente  $\mathbf{a}'$ , dados por la ec. (6.23), y los tres últimos, por el procedimiento idéntico usado para derivar la ec. (6.20), son  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}'$ . Esto es, sustituyendo las cantidades apropiadas en la ec. (6.20), tenemos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times u_{x'}V'_{x'} + \boldsymbol{\omega} \times u_{y'}V'_{y'} + \boldsymbol{\omega} \times u_{z'}V'_{z'} \\ = \boldsymbol{\omega} \times (u_{x'}V'_{x'} + u_{y'}V'_{y'} + u_{z'}V'_{z'}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}'. \end{aligned}$$

Por ello  $d\mathbf{V}'/dt = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}'$ . Igualmente, de las ecs. (6.16) y (6.21)  $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{V} = \mathbf{V}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ , de modo que

$$\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{V}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

Sustituyendo ambos resultados en la ec. (6.24) obtenemos finalmente

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (6.25)$$

Esta ecuación da la relación entre las aceleraciones  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{a}'$  de  $A$  registradas por los observadores  $O$  y  $O'$  en movimiento relativo de rotación uniforme. El segundo término  $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}'$  se denomina la *aceleración de Coriolis*. El tercer término es similar a la ec. (5.59) y corresponde a la *aceleración centrípeta*. Tanto la aceleración de Coriolis como la aceleración centrípeta son el resultado del movimiento rotacional relativo de los observadores. En la próxima sección ilustraremos el uso de estas relaciones.

### 6.5 Movimiento relativo con respecto a la tierra

Una de las aplicaciones más interesantes de la ec. (6.25) es el estudio del movimiento de un cuerpo con respecto a la tierra. Como se indicó en el ejemplo 5.10, la velocidad angular de la tierra es  $\omega = 7,292 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$ . Su dirección es aquella del eje de rotación de la tierra. Consideremos un punto  $A$  sobre la superficie terrestre (Fig. 6-6). Llamaremos  $\mathbf{g}_0$  la aceleración de la gravedad medida por un observador que no gira situado en  $A$ . Luego  $\mathbf{g}_0$  corresponde a  $\mathbf{a}$  de la ec. (6.25). Despejando  $\mathbf{a}'$  de la ec. (6.25), obtenemos la aceleración medida por un observador que rota con la tierra:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{g}_0 - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (6.26)$$

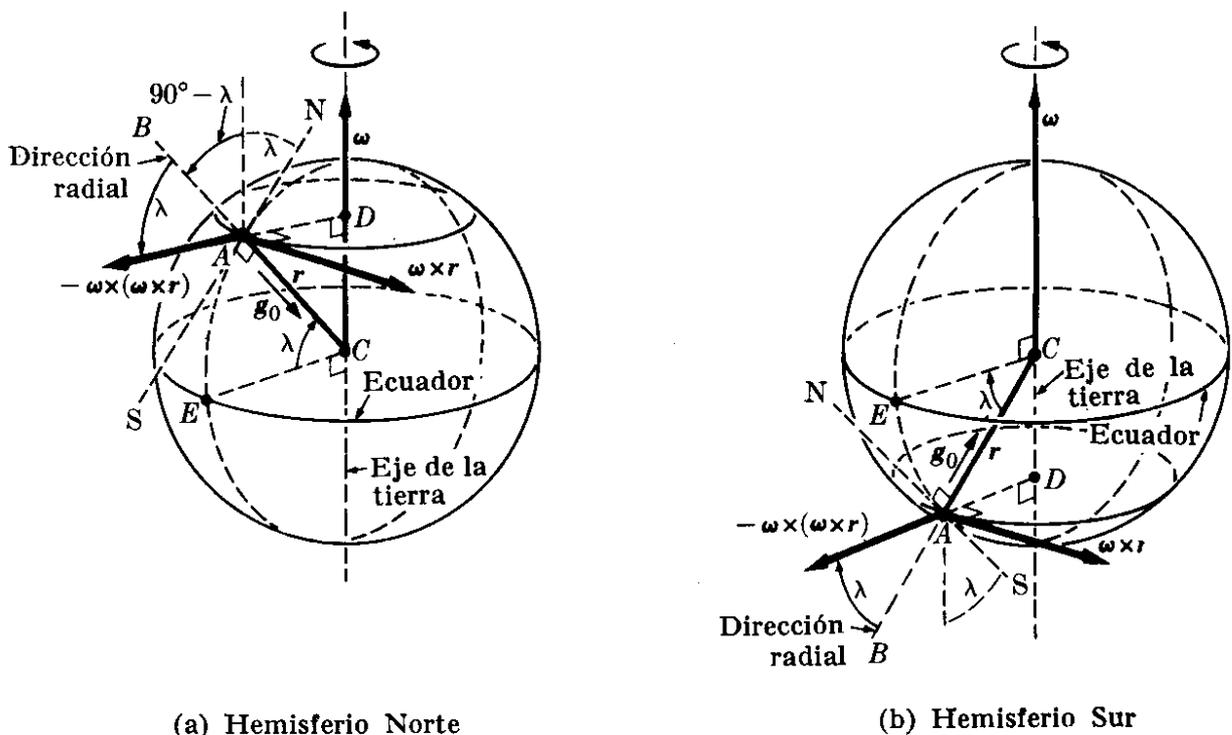


Fig. 6-6. Aceleración centrífuga debida a la rotación de la tierra.

Primero consideraremos el caso de un cuerpo inicialmente en reposo, o moviéndose muy lentamente, de modo que el término de Coriolis  $-2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}'$  es cero o despreciable cuando se compara con el último término  $-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ . La

aceleración  $\mathbf{a}'$  medida en este caso se denomina *aceleración efectiva* de la gravedad, y se designa por la letra  $\mathbf{g}$ . Así

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (6.27)$$

Esta es la aceleración medida por un péndulo, como se discutirá en el capítulo 12. Suponiendo que la tierra es esférica (realmente se desvía ligeramente de esta forma) y que no hay anomalías locales, podemos considerar que  $\mathbf{g}_0$  está señalando hacia el centro de la tierra en la dirección radial. Debido al segundo término de la ec. (6.27), la dirección de  $\mathbf{g}$ , llamada la *vertical* se desvía ligeramente de la

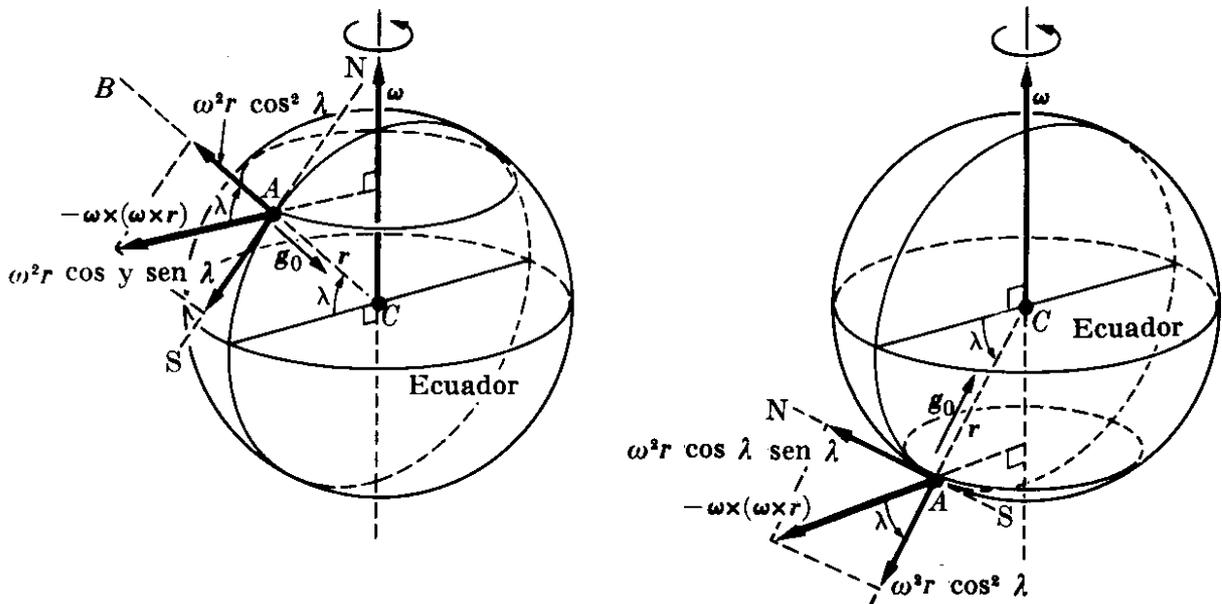


Fig. 6-7. Componentes horizontal y radial de la aceleración centrífuga.

dirección radial, y está determinada por la línea de la plomada. Los líquidos siempre reposan en equilibrio con su superficie en dirección perpendicular a  $\mathbf{g}$ . Sin embargo, para propósitos prácticos, y en la ausencia de perturbaciones locales, la vertical puede suponerse que coincide con la dirección radial.

Analicemos ahora en mayor detalle el último término en la ec. (6.27); esto es,  $-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ . Se denomina *aceleración centrífuga* debido a que por su signo negativo señala en la dirección  $DA$  como se indica en la Fig. 6-6. El ángulo  $\lambda$  que  $r = CA$  hace con el ecuador es la latitud. Por consiguiente, el vector  $\boldsymbol{\omega}$  hace un ángulo  $90^\circ - \lambda$  con  $CA$  en el hemisferio norte y  $90^\circ + \lambda$  en el hemisferio sur. La magnitud de  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  es entonces

$$\omega r \sin (90^\circ \pm \lambda) = \omega r \cos \lambda,$$

y la dirección de  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ , siendo perpendicular a  $\boldsymbol{\omega}$ , es paralela al ecuador. Recordando el ejemplo 5.11, encontramos que la magnitud de la aceleración centrífuga  $-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$  es

$$|-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})| = \omega^2 r \cos \lambda = 3,34 \times 10^{-2} \cos \lambda \text{ m s}^{-2}, \quad (6.28)$$

donde  $r = 6,37 \times 10^6$  m, es el radio de la tierra. Esta aceleración disminuye del ecuador a los polos, pero es siempre pequeña comparada con la aceleración de la gravedad  $g_0 = 9,80 \text{ ms}^{-2}$ . Su máximo valor, en el ecuador, es alrededor del 0,3 % de  $g_0$  (ver ejemplo 5.11).

Encontraremos ahora las componentes de  $-\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$  a lo largo de la dirección radial  $AB$  y a lo largo de la línea norte-sur (NS) en  $A$ . En la Fig. 6-7, así como en la Fig. 6-6 la línea  $AB$ , la cual es la extensión de  $CA$ , está en la dirección radial. El vector  $\omega$  obviamente hace un ángulo  $\lambda$  con NS. Como se indicó antes, la aceleración de la gravedad  $\mathbf{g}_0$  se dirige hacia el centro a lo largo de  $AB$ . La aceleración centrífuga  $-\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$  forma un ángulo  $\lambda$  con  $AB$ ; su componente a lo largo de  $AB$  se obtiene, por consiguiente, multiplicando su magnitud dada por la ec. (6.28), por  $\cos \lambda$ . Esto es,

$$|-\omega \times (\omega \times \mathbf{r})| \cos \lambda = \omega^2 r \cos^2 \lambda.$$

La componente de la aceleración centrífuga a lo largo de la línea NS se dirige hacia el sur en el hemisferio norte (y hacia el norte en el hemisferio sur) y se obtiene multiplicando su magnitud por  $\sin \lambda$ , obteniéndose

$$|-\omega \times (\omega \times \mathbf{r})| \sin \lambda = \omega^2 r \cos \lambda \sin \lambda.$$

Las dos componentes se ilustran en la Fig. 6-7. De acuerdo a la definición de  $\mathbf{g}$  dada por la ec. (6.27), las componentes de  $\mathbf{g}$  a lo largo de las direcciones radial y horizontal son como se muestran en la Fig. 6-8. Debido a la pequeñez del término centrífugo, el ángulo  $\alpha$  es muy pequeño y la magnitud de  $\mathbf{g}$  no difiere apre-

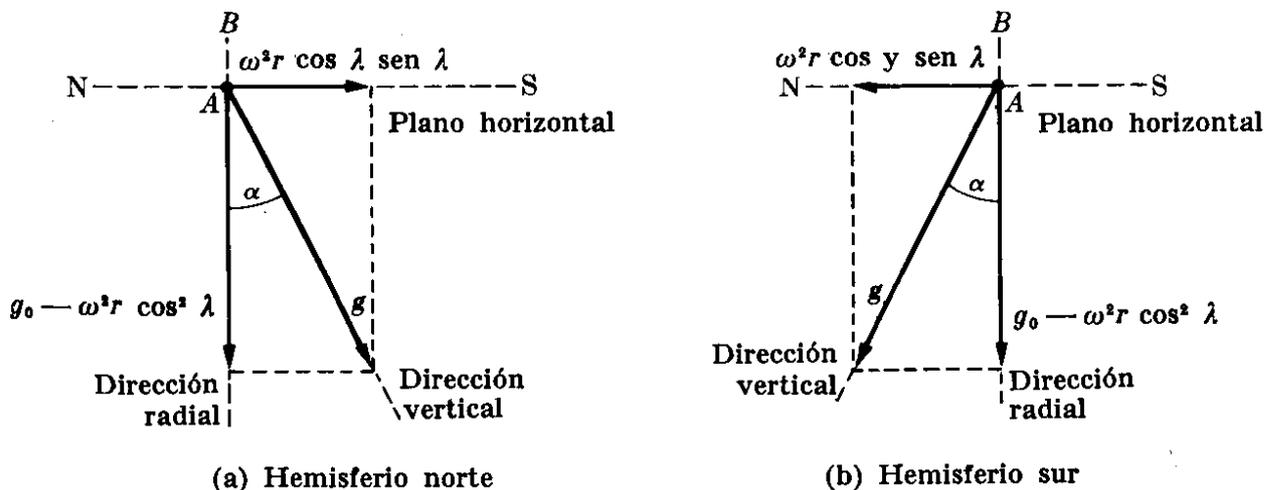


Fig. 6-8. Definición de la dirección vertical y la aceleración efectiva de caída.

ciablemente de su componente a lo largo de la dirección radial  $AB$ . Por consiguiente podemos escribir, como una buena aproximación que

$$g = g_0 - \omega^2 r \cos^2 \lambda. \quad (6.29)$$

Aunque el último término es muy pequeño, toma en cuenta el aumento obser-

vado en el valor de la aceleración de la gravedad con la latitud como se aprecia en la tabla 6-1.

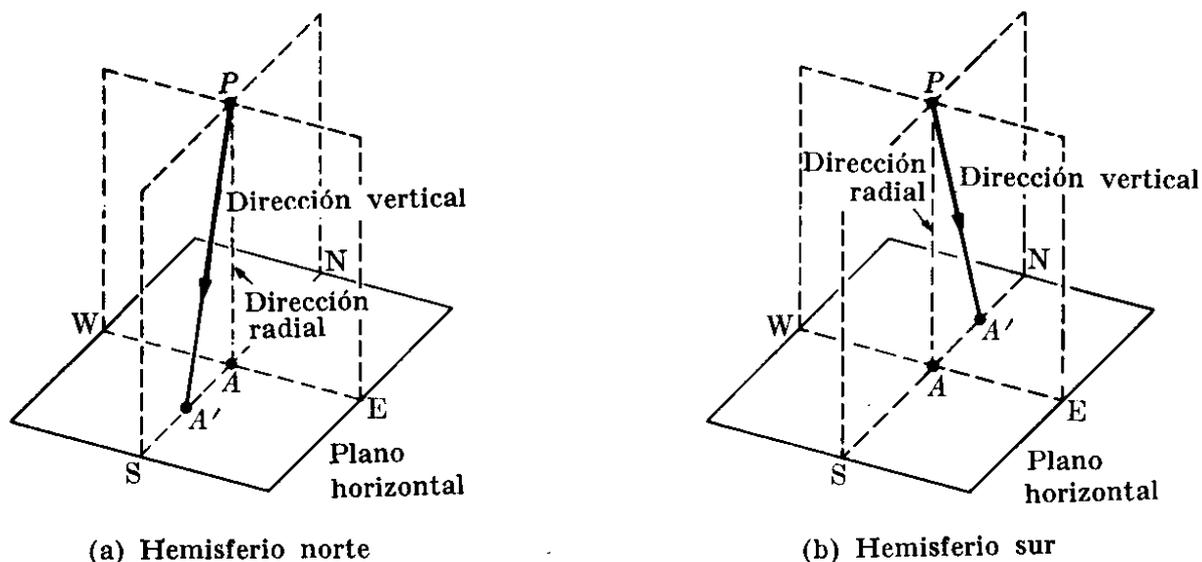
La componente de la aceleración centrífuga a lo largo de la dirección NS tiende, en el hemisferio norte a desplazar al cuerpo ligeramente hacia el sur de la dirección radial  $AB$  y hacia el norte en el hemisferio sur. Por lo tanto, la trayectoria de un cuerpo que cae se desviará como se ilustra en la Fig. 6-9. El cuerpo llegará a  $A'$  en lugar de hacerlo a  $A$ , como sucedería si no hubiera rotación. Debido al pequeño valor de  $\alpha$  esta desviación es despreciable.

Consideremos ahora el término Coriolis  $-2\omega \times V'$ . En el caso de un cuerpo que cae, la velocidad  $V'$  es esencialmente hacia abajo a lo largo de la vertical  $AB$  (Fig. 6-10) y  $\omega \times V'$  señala hacia el oeste. Luego el término Coriolis  $-2\omega \times V'$  está señalando hacia el este, y el cuerpo al caer se desviará en esa dirección lle-

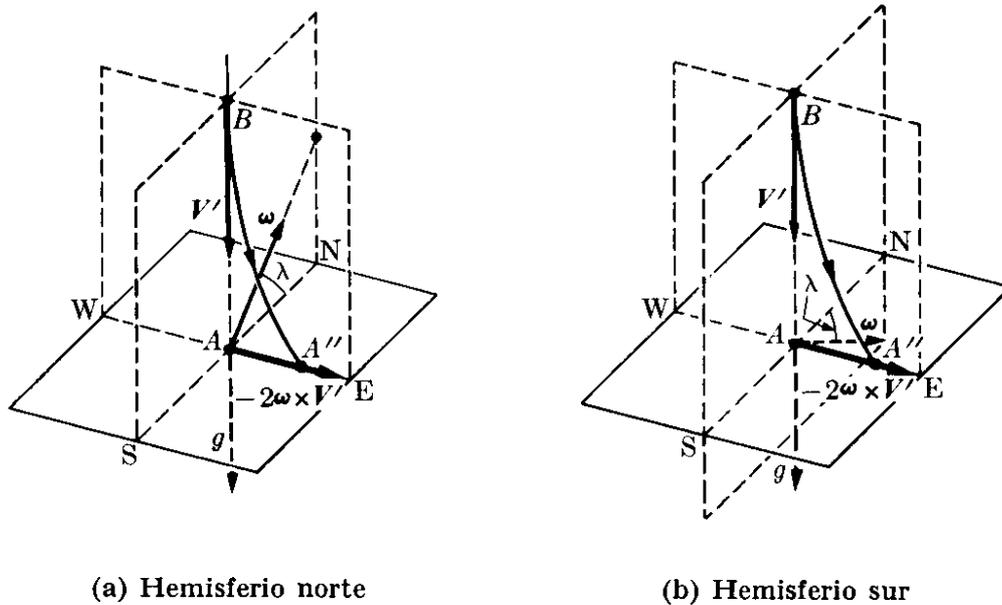
**TABLA 6-1** Valores de la aceleración de la gravedad, expresados en  $\text{m s}^{-2}$

Localidad	Latitud	Gravedad
Polo Norte	$90^\circ 0'$	9,8321
Anchorage	$61^\circ 10'$	9,8218
Greenwich	$51^\circ 29'$	9,8119
París	$48^\circ 50'$	9,8094
Washington	$38^\circ 53'$	9,8011
Key West (Florida)	$24^\circ 34'$	9,7897
Panamá	$8^\circ 55'$	9,7822
Ecuador	$0^\circ 0'$	9,7799

gando al suelo en  $A''$ , ligeramente al este de  $A$ . Combinando este efecto de Coriolis con el efecto centrífugo, el cuerpo caerá en un punto al sureste de  $A$  en el hemisferio norte y al noreste de  $A$  en el hemisferio sur. Este efecto, el cual es



**Fig. 6-9.** Desviación de la dirección de un cuerpo que cae debido a la aceleración centrífuga: hacia el sur (hacia el norte) en el hemisferio norte (sur).



(a) Hemisferio norte

(b) Hemisferio sur

**Fig. 6-10.** Desviación hacia el este en el hemisferio norte (sur) de un cuerpo que cae debido a la aceleración Coriolis.

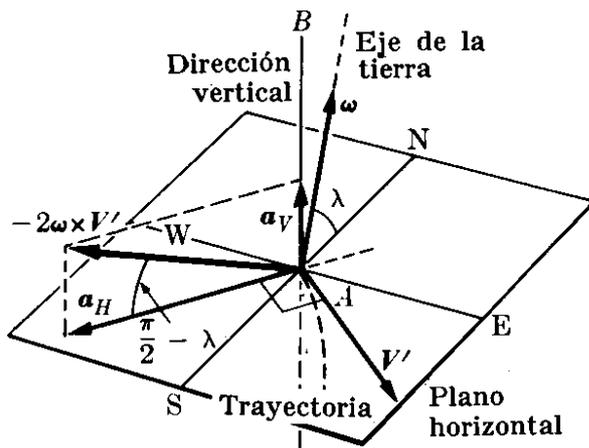
despreciable en la mayor parte de los casos, debe tomarse en cuenta tanto en bombardeo de gran altura como en cohetes balísticos intercontinentales. La aceleración de Coriolis afecta seriamente las trayectorias de los cohetes y de los satélites, debido a sus grandes velocidades.

En el caso de un cuerpo que se mueve en un plano horizontal, el vector  $-2\omega \times V'$ , perpendicular a  $\omega$  y  $V'$ , hace un ángulo igual a  $\pi/2 - \lambda$  con el plano horizontal. Tiene una componente horizontal  $a_H$  y una componente vertical  $a_V$  (Fig. 6-11). La componente horizontal  $a_H$  tiende a hacer que la trayectoria se desvíe de una recta, hacia la derecha en el hemisferio norte y hacia la izquierda en el hemisferio sur. La componente  $a_H$  disminuye a medida que uno se aleja de los polos hacia el ecuador, donde su valor es cero. Por ello en el ecuador la aceleración de Coriolis no produce ningún efecto horizontal en el movimiento horizontal. El efecto vertical es pequeño comparado con la aceleración de la gravedad, y en la mayor parte de los casos puede ser despreciado.

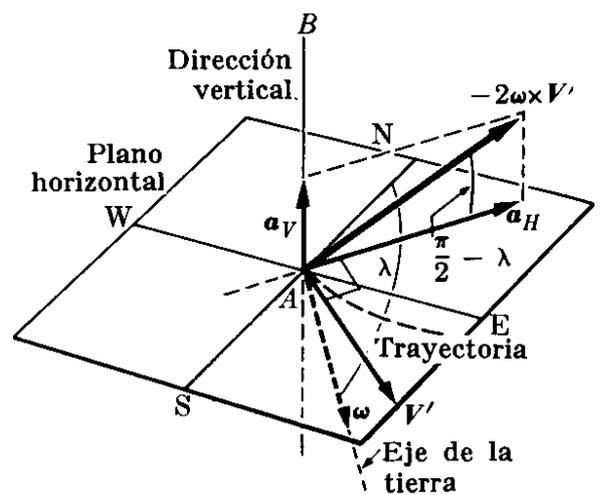
El efecto horizontal puede verse en dos fenómenos comunes. Uno es el remolino en un huracán. Si se desarrolla un centro de baja presión en la atmósfera, el viento fluirá hacia el centro (Fig. 6-12). Sin embargo, la aceleración de Coriolis desvía las moléculas del aire hacia la derecha de sus trayectorias en las latitudes nortes dando por resultado un movimiento en sentido contrario a las agujas del reloj o remolino.\* En el hemisferio sur la rotación es en el sentido de las agujas del reloj.

Como un segundo ejemplo, consideremos las oscilaciones de un péndulo. Cuando la amplitud de las oscilaciones es pequeña, podemos suponer que el movimiento de la masa es a lo largo de una trayectoria horizontal. Si el péndulo inicialmente

\* La presión y la temperatura del aire tienen también un profundo efecto en su movimiento. Este efecto da lugar a un fenómeno el cual es demasiado complicado para ser adecuadamente descrito aquí. El resultado final es el movimiento ciclónico ilustrado en la Fig. 6-12(c).

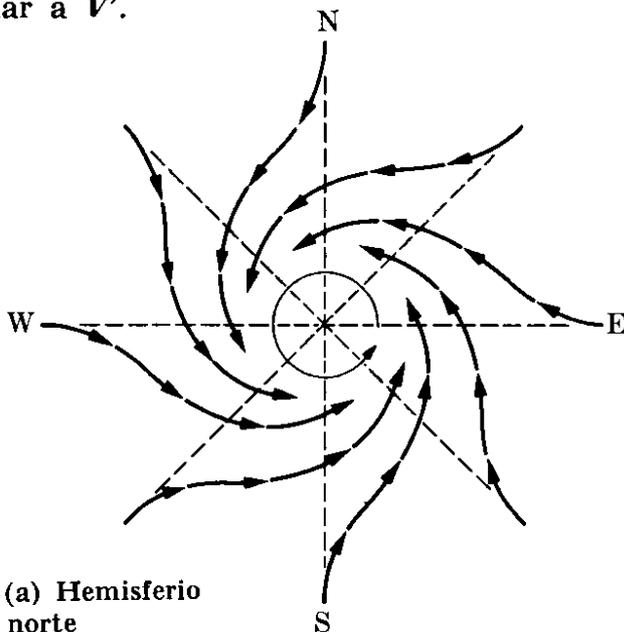


(a) Hemisferio norte

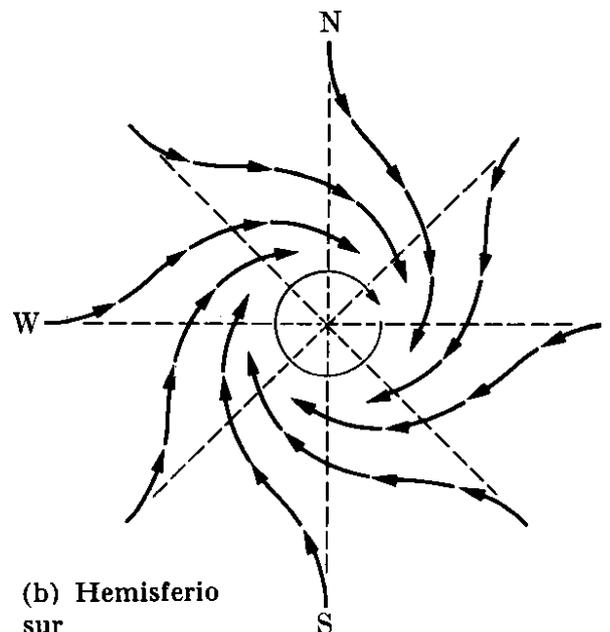


(b) Hemisferio sur

**Fig. 6-11.** Aceleración de Coriolis. Cuando un cuerpo se mueve en un plano horizontal, la componente horizontal de la aceleración de Coriolis señala hacia la derecha (izquierda) de la dirección del movimiento en el hemisferio norte (sur). Aquí  $V'$  está en el plano horizontal;  $\omega$  está en el plano definido por  $AB$  y  $NS$ , y  $a_H$  es perpendicular a  $V'$ .



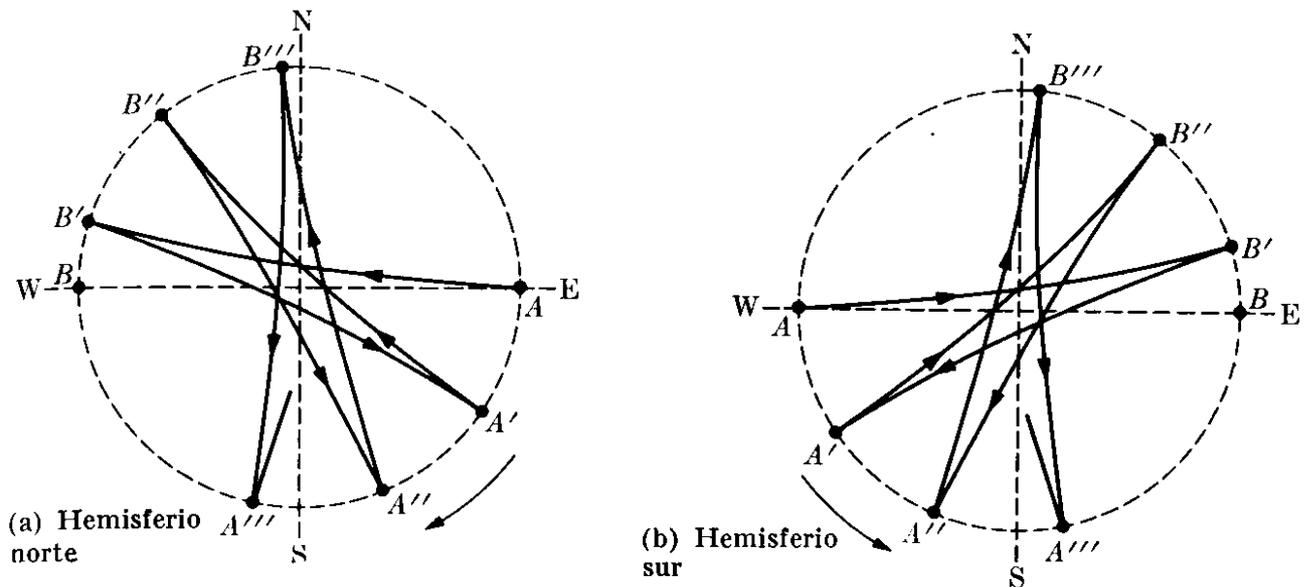
(a) Hemisferio norte



(b) Hemisferio sur



**Fig. 6-12.** Movimiento del viento en sentido contrario a las agujas del reloj en el hemisferio norte como resultado de un centro de baja presión combinado con la aceleración de Coriolis. La parte (c) muestra una perturbación de baja presión fotografiada por un satélite Tيروس. (Fotografía cortesía de NASA/Centro Espacial Goddard).



**Fig. 6-13.** Rotación del plano de oscilación de un péndulo como resultado de la aceleración de Coriolis (la rotación en el hemisferio sur es en la dirección opuesta a la del hemisferio norte).

oscilara en la dirección este-oeste y fuera liberado en  $A$  (ver Fig. 6-13), continuaría oscilando entre  $A$  y  $B$  si la tierra no estuviera rotando. Pero a causa de la aceleración de Coriolis, debida a la rotación de la tierra, la trayectoria del péndulo se desvía continuamente hacia la derecha en el hemisferio norte y hacia la izquierda en el hemisferio sur. Por consiguiente al final de la primera oscilación, llega a  $B'$  en lugar de  $B$ . A su regreso llega a  $A'$  y no a  $A$ . Luego, en oscilaciones completas sucesivas llega a  $A''$ ,  $A'''$ , etc. En otras palabras, el plano de oscilación del péndulo rota en el sentido de las agujas del reloj en el hemisferio norte y en sentido contrario a las agujas del reloj en el hemisferio sur. Dejamos al estudiante que verifique que el ángulo de rotación del plano de oscilación durante cada hora es de  $15^\circ \text{ sen } \lambda$ . El efecto ha sido muy exagerado en la Fig. 6.13; alcanza su máximo valor en los polos y su valor es cero en el ecuador.

Este efecto fue demostrado espectacularmente por el físico francés Jean Leon Foucault cuando en 1851, desde la cúpula de los Inválidos, en París, colgó un péndulo de 67 metros de largo. Durante cada oscilación, la masa del péndulo dejaba caer arena en un círculo demostrando experimentalmente que el plano de oscilación rotaba a razón de  $11^\circ 15'$  cada hora. Existe un péndulo de Foucault en la sala del Instituto Smithsonian en Washington D.C., así como en la sala del edificio de las Naciones Unidas en New York. El experimento de Foucault es una prueba efectiva de la rotación de la tierra. Aún si la tierra hubiera estado siempre cubierta de nubes, este experimento habría demostrado a los físicos que la tierra estaba rotando.

**EJEMPLO 6.3.** Calcular la desviación de un cuerpo que cae debida a la aceleración de Coriolis. Compararla con la desviación debido a la aceleración centrífuga.

**Solución:** De la Fig. 6-10 vemos que la velocidad  $V'$  de caída de un cuerpo forma un ángulo de  $90^\circ + \lambda$  con  $\omega$ . Luego la magnitud de la aceleración de Coriolis  $-2\omega \times V'$  es

$$2\omega V' \text{ sen } (90^\circ + \lambda) \quad \text{ó} \quad 2\omega V' \text{ cos } \lambda.$$

Esta es la aceleración  $d^2x/dt^2$  del cuerpo que cae, considerando la dirección este como el eje de las  $X$ . Por consiguiente

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega V' \cos \lambda.$$

Para el valor de  $V'$  usamos como una buena aproximación, el valor de caída libre obtenido en el capítulo 5, esto es  $V' = gt$ , por tanto,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega gt \cos \lambda.$$

Integrando, y suponiendo que el cuerpo parte del reposo ( $dx/dt = 0$  para  $t = 0$ ) tenemos

$$\frac{dx}{dt} = \omega gt^2 \cos \lambda.$$

Integrando nuevamente y considerando que cuando  $t = 0$  el cuerpo se encuentra sobre  $A$  y por lo tanto  $x = 0$ , obtenemos

$$x = \frac{1}{3}\omega gt^3 \cos \lambda,$$

lo que da el desplazamiento hacia el este en función del tiempo de caída. Si el cuerpo se suelta desde una altura  $h$  podemos suponer su valor para caída libre como  $h = \frac{1}{2}gt^2$ , de modo que

$$x = \frac{1}{3}\omega \left(\frac{8h^3}{g}\right)^{1/2} \cos \lambda = 1,53 \times 10^{-5} h^{3/2} \cos \lambda.$$

Por ejemplo, para un cuerpo que cae de una altura de 100 m. tenemos  $x = 1,53 \times 10^{-2} \cos \lambda$  m, que es una cantidad relativamente pequeña cuando se le compara con la altura de caída.

La aceleración centrífuga hacia el sur es  $\omega^2 r^2 \cos \lambda \sin \lambda = 3,34 \times 10^{-2} \cos \lambda \sin \lambda$  y la deflexión, usando  $h = \frac{1}{2}gt^2$ , es

$$y = \frac{1}{2}(\omega^2 r \cos \lambda \sin \lambda)t^2 = \omega^2 r(h/g) \cos \lambda \sin \lambda = 0,342 h \cos \lambda \sin \lambda \text{ m.}$$

## 6.6 Transformación de Lorentz

Al final del siglo diecinueve, cuando se suponía que el espacio, vacío de materia, estaba lleno con "éter", hubo una gran discusión en lo que respecta a cómo se movían los cuerpos a través del éter y cómo afectaría este movimiento la velocidad de la luz medida desde la tierra. Los físicos al principio habían supuesto que las vibraciones de este éter hipotético estaban relacionadas con la luz del mismo modo que las vibraciones en el aire están relacionadas con el sonido. Suponiendo el éter estacionario, encontramos que la luz se desplaza con respecto al éter con una velocidad  $c = 2,9979 \times 10^8$  ms<sup>-1</sup>. Si la tierra se moviera a través del éter sin alterarlo, entonces la velocidad de la luz con respecto a la tierra debía depender de la dirección de propagación de la luz. Por ejemplo, debía ser  $c - v$  para un rayo de luz que se propaga en la misma dirección del movimiento de la

tierra y  $c + v$  en la dirección opuesta. Sin embargo, si la trayectoria de la luz como se observa desde la tierra es en dirección perpendicular a su movimiento, su velocidad relativa a la tierra debía ser  $\sqrt{c^2 - v^2}$ . (Recordar el ejemplo 6.2d para un caso similar del sonido).

En 1881 los físicos norteamericanos Michelson y Morley iniciaron una serie de experimentos memorables para medir la velocidad de luz en diferentes direcciones con respecto a la tierra. Con gran sorpresa encontraron que la velocidad de la luz era la misma en todas las direcciones.\* Sin embargo, la transformación Galileana indica que ningún cuerpo puede tener la misma velocidad relativa a dos observadores en movimiento uniforme relativo, y que la velocidad relativa depende de la dirección del movimiento del observador. Esto se aprecia particularmente en las ecs. (6.9) y (6.10). Una explicación posible podría ser que la tierra arrastrara al éter con ella, como arrastra a la atmósfera, y por consiguiente cerca a la superficie terrestre el éter estaría en reposo relativo con respecto a la tierra. Esta es una explicación poco probable, ya que el arrastre del éter se manifestaría asimismo en otros fenómenos relacionados con la propagación de la luz. Tales fenómenos no se han observado nunca. Por tales razones la idea del éter ha sido descartada por los físicos.

El dilema del experimento de Michelson y Morley fue resuelto en 1905 cuando Einstein estableció su principio de relatividad el cual se discutirá en más detalle en la sección 11.3. Este principio establece que

*todas las leyes de la naturaleza son las mismas (es decir, permanecen invariantes) para todos los observadores en movimiento relativo de traslación uniforme.*

Einstein supuso que la velocidad de la luz es una invariante física que tiene el mismo valor para todos los observadores. Como veremos posteriormente, esto se requiere cuando aplicamos el principio de relatividad a las leyes del electromagnetismo. Bajo esta suposición, la transformación galileana no es la correcta. En particular la cuarta ecuación en (6.8)  $t' = t$  no puede ser correcta. Puesto que la velocidad es la distancia dividida entre el tiempo, tenemos que ajustar el tiempo al igual que la distancia, si el cociente de las dos debe ser el mismo para observadores en movimiento relativo como en el caso de la velocidad de la luz. En otras palabras, el intervalo de tiempo entre dos eventos *no tiene* necesariamente que ser el mismo para observadores en movimiento relativo. Por consiguiente debemos reemplazar la transformación Galileana por otra de modo que la velocidad de la luz sea una invariante. Como en el caso de la transformación Galileana, supondremos que los observadores  $O$  y  $O'$  se mueven con velocidad relativa  $v$  y que los ejes  $X$  y  $X'$  señalan en la dirección del movimiento relativo y los ejes  $YZ$  e  $YZ'$  son paralelos respectivamente (Fig. 6-14). Podemos también

---

\* Para una revisión crítica de los experimentos realizados para determinar la velocidad de la luz con respecto a la tierra en diferentes direcciones, consultar R. S. Shankland, *et al.*, *Reviews of Modern Physics* 27, 167 (1955).

suponer que ambos observadores ajustan sus relojes de modo que  $t = t' = 0$  cuando ellos coinciden.

Supongamos que para  $t = 0$  se emite un destello de luz en la posición común. Después de un tiempo  $t$  el observador  $O$  notará que la luz ha llegado al punto  $A$  y escribirá  $r = ct$ , siendo  $c$  la velocidad de la luz. Ya que

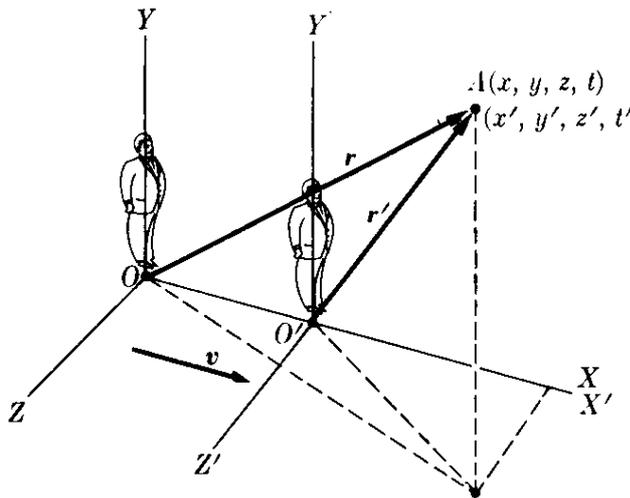
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

podemos también escribir

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2. \quad (6.30)$$

Similarmente, el observador  $O'$  notará que la luz llega al mismo punto  $A$  en un tiempo  $t'$ , pero también con velocidad  $c$ . Luego él escribe  $r' = ct'$ , o

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \quad (6.31)$$



**Fig. 6-14.** Sistemas de referencia en movimiento relativo de traslación uniforme.

Nuestro propósito es obtener una transformación que relacione las ecs. (6.30) y (6.31). La simetría del problema sugiere  $y' = y$  y  $z' = z$ . Tam-

bién, ya que  $OO' = vt$  para el observador  $O$ , debe cumplirse que  $x = vt$  para  $x' = 0$  (punto  $O'$ ). Esto hace suponer que  $x' = k(x - vt)$ , donde  $k$  es una constante a determinarse. Ya que  $t'$  es diferente, podemos también suponer que  $t' = a(t - bx)$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes a determinarse (para la transformación Galileana  $k = a = 1$  y  $b = 0$ ). Realizando todas estas substituciones en la ec. (6.31) tenemos

$$k^2(x^2 - 2vxt + v^2t^2) + y^2 + z^2 = c^2 a^2 (t^2 - 2bxt + b^2 x^2),$$

ó

$$\begin{aligned} (k^2 - b^2 a^2 c^2) x^2 - 2(k^2 v - b a^2 c^2) x t + y^2 + z^2 \\ = (a^2 - k^2 v^2 / c^2) c^2 t^2. \end{aligned}$$

Este resultado debe ser idéntico a la ec. (6.30). Por tanto

$$k^2 - b^2 a^2 c^2 = 1, \quad k^2 v - b a^2 c^2 = 0, \quad a^2 - k^2 v^2 / c^2 = 1.$$

Resolviendo este conjunto de ecuaciones, obtenemos

$$k = a = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{y} \quad b = v/c^2. \quad (6.32)$$

La nueva transformación, compatible con la invariancia de la velocidad de la luz, es entonces

$$\begin{aligned}x' &= k(x - vt) = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= k(t - vx/c^2) = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.\end{aligned}\tag{6.33}$$

Este conjunto de relaciones es denominado *transformación de Lorentz* debido a que fue obtenida por primera vez por el físico holandés Hendrik Lorentz, alrededor de 1890, en conexión con el problema del campo electromagnético de una carga en movimiento.

Cuando notamos que  $c$  es una velocidad muy grande comparada con las velocidades que encontramos en la tierra, de modo que la relación  $v/c$  es muy pequeña, los términos  $v^2/c^2$  y  $vx/c^2$  son, en general, despreciables y  $k$  es prácticamente igual a uno (ver Fig. 6-15). Desde el punto de vista práctico, entonces, no hay diferencia entre las transformaciones Lorentziana y Galileana, y podemos seguir usando la última en la mayor parte de los problemas que encontramos. Sin embargo, cuando tratamos con partículas muy rápidas, tales como los electrones en los átomos o las partículas en los rayos cósmicos, *debemos* usar la transformación de Lorentz.

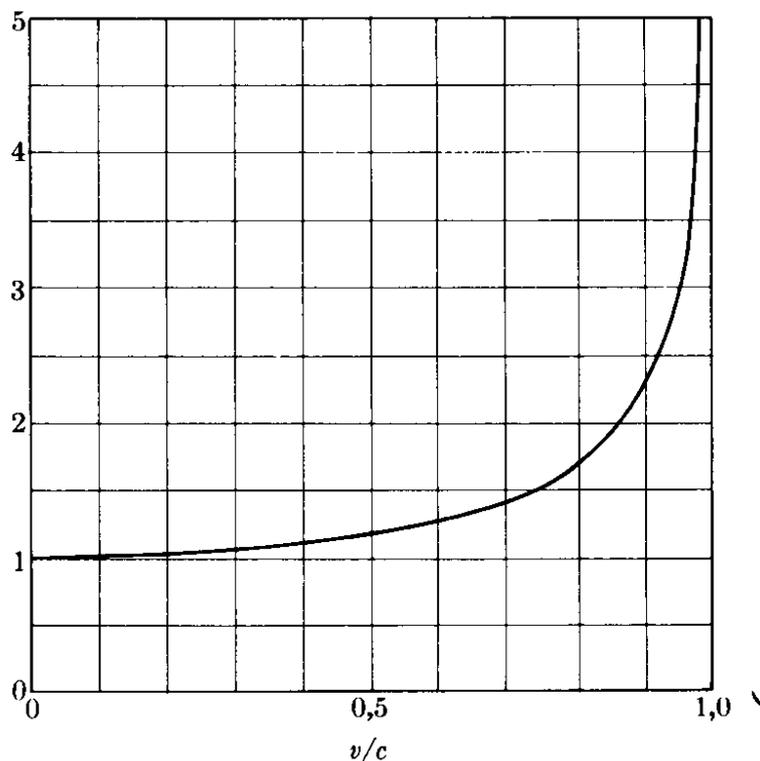


Fig. 6-15. Cambio de  $k$  en función de  $v/c$ .

**EJEMPLO 6.4.** Obtener la transformación de Lorentz que exprese las coordenadas  $x, y, z$  y el tiempo  $t$  medido por  $O$  en función de las coordenadas  $x', y', z'$  y el tiempo  $t'$  medido por  $O'$ .

**Solución:** Esta es la transformación Lorentziana inversa a aquella expresada por la ec. (6.33). Por supuesto, la segunda y tercera relaciones no ofrecen ninguna dificultad. Una manera simple de resolver la primera y la cuarta es resolverlas como un conjunto de dos ecuaciones simultáneas para  $x$  y  $t$  en función de  $x'$  y  $t'$ . Dejamos este método como un ejercicio para el estudiante, sin embargo, y procederemos a lo largo de una línea de razonamiento más física. Desde el punto de vista del observador  $O'$ , el observador  $O$  se aleja en la dirección  $-X'$  con una velocidad  $-v$ . El observador  $O'$  tiene derecho a usar la misma transformación de Lorentz para obtener los valores de  $x$  y  $t$  medidos por  $O$  en función de los valores  $x'$  y  $t'$  que mide  $O'$ . Para ello el observador  $O'$  tiene solamente que reemplazar  $v$  por  $-v$  en la ec. (6.33) e intercambiar  $x, t$  con  $x', t'$ . Así

$$\begin{aligned}x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\y &= y', \\z &= z', \\t &= \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\end{aligned}\tag{6.34}$$

que da la transformación inversa de Lorentz.

### 6.7 Transformación de velocidades

Obtengamos ahora la regla para comparar velocidades. La velocidad de  $A$  medida por  $O$  tiene componentes

$$V_x = \frac{dx}{dt}, \quad V_y = \frac{dy}{dt}, \quad V_z = \frac{dz}{dt}.\tag{6.35}$$

Similarmente, las componentes de la velocidad de  $A$  medida por  $O'$  son

$$V'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad V'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad V'_z = \frac{dz'}{dt'}.$$

¡Ótense que nosotros usamos  $dt'$  y no  $dt$ , ya que  $t$  y  $t'$  no son las mismas. Diferenciando las ecs. (6.33) obtenemos

$$\begin{aligned}dx' &= \frac{dx - v dt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{V_x - v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} dt, \\dy' &= dy, \\dz' &= dz, \\dt' &= \frac{dt - v dx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1 - vV_x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} dt.\end{aligned}$$

En la primera y última ecuación  $dx$  ha sido reemplazada por  $V_x dt$ , de acuerdo a la ec. (6.35). Por consiguiente, dividiendo las tres primeras de estas ecuaciones entre la cuarta, obtenemos

$$\begin{aligned} V'_{x'} &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{V_x - v}{1 - vV_x/c^2}, \\ V'_{y'} &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{V_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vV_x/c^2}, \\ V'_{z'} &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{V_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vV_x/c^2}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Este conjunto de ecuaciones da la ley de transformación de Lorentz para las velocidades; esto es, la regla para comparar la velocidad de un cuerpo medida por dos observadores en movimiento uniforme de traslación relativa. Nuevamente se reduce a la ec. (6.10) cuando la velocidad relativa es muy pequeña comparada con la velocidad de la luz. Para partículas que se mueven en la dirección X tenemos  $V_x = V$ ,  $V_y = V_z = 0$ . Por consiguiente, como  $V'_{x'} = V'$  ya que las otras dos componentes de  $V'$  son cero, la ec. (6.36) se vuelve

$$V' = \frac{V - v}{1 - vV/c^2}. \quad (6.37)$$

Para verificar que la ec. (6.37) es compatible con la suposición que la velocidad de la luz es la misma para ambos observadores  $O$  y  $O'$ , consideremos el caso de una señal lumínica que se propaga en la dirección X. Luego  $V = c$  en la ec. (6.37) y

$$V' = \frac{c - v}{1 - vc/c^2} = c.$$

Por lo tanto el observador  $O'$  mide también una velocidad  $c$ . Resolviendo la ec. (6.37) para  $V$ , obtenemos

$$V = \frac{V' + v}{1 - vV'/c^2}, \quad (6.38)$$

que es la transformación inversa de la ec. (6.37). Nótese que si  $V'$  y  $v$  son ambas menores que  $c$ , entonces  $V$  es también menor que  $c$ . Además, la velocidad  $v$  no puede ser mayor que  $c$  porque el factor  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  sería imaginario. Por el momento no podemos dar un significado físico a tal factor. Por consiguiente la velocidad de la luz es la máxima velocidad que puede observarse.

Debe también notarse que las ecs. (6.37) o (6.38) relacionan la velocidad del mismo cuerpo medida por dos observadores en movimiento relativo. Sin embargo, un observador dado combina *diferentes* velocidades en su propio sistema de referencia de acuerdo a las reglas establecidas en el capítulo 3.

**EJEMPLO 6.5.** Verificar el hecho de que las transformaciones de velocidades ec. (6.36), son compatibles con la suposición de que la velocidad de la luz es la misma para ambos observadores considerando un rayo de luz que se mueve a lo largo (a) del eje  $Y$  con respecto a  $XYZ$ , (b) del eje  $Y'$  con respecto a  $X'Y'Z'$ .

**Solución:** (a) En este caso debemos suponer que  $V_x = 0$ ,  $V_y = c$ , y  $V_z = 0$ . Así la ec. (6.36) se vuelve

$$V_{x'} = -v, \quad V_{y'} = c\sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad V_{z'} = 0.$$

Entonces la velocidad relativa a  $X'Y'Z'$  es

$$V' = \sqrt{V_{x'}^2 + V_{y'}^2} = \sqrt{v^2 + c^2(1 - v^2/c^2)} = c,$$

y el observador  $O'$  mide también una velocidad  $c$  para la luz, como se requirió cuando se derivó la transformación de Lorentz. Al observador en movimiento  $O'$  le parece que la luz se propaga con respecto al sistema  $X'Y'Z'$  en una dirección que hace un ángulo con el eje  $X'$  dado por

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{V_{y'}}{V_{x'}} = \frac{-c}{v} \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

(b) Consideremos ahora el caso en el cual el observador  $O'$  ve el rayo de luz propagándose a lo largo del eje  $Y'$ . Luego  $V_{x'} = 0$  y las dos primeras expresiones en la ec. (6.36) dan

$$0 = \frac{V - v}{1 - vV_x/c^2}, \quad V_{y'} = \frac{V_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vV_x/c^2}.$$

De la primera ecuación obtenemos  $V_x = V$ , la cual, cuando se reemplaza en la segunda ecuación, da

$$V_{y'} = \frac{V_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Pero para el observador  $O$ , quien mide la velocidad de la luz como  $c$ , tenemos

$$c = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{v^2 + V_y^2} \quad \text{ó} \quad V = \sqrt{c^2 - v^2} = c\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

la cual, cuando se reemplaza en la expresión previa de  $V_{y'}$  da  $V_{y'} = c$ . Una vez más verificamos que el observador  $O'$  mide también la velocidad de la luz como  $c$ . La dirección en la cual el observador ve el rayo de luz hace un ángulo  $\alpha$  con el eje de las  $X$  dado por

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V_y}{V_x} = \frac{c}{v} \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Los resultados de este problema deben ser comparados con aquellos del ejemplo 6.2 para el sonido, en el cual se usó la transformación Galileana.

**EJEMPLO 6.6.** Obtener la relación entre la aceleración de una partícula medida por dos observadores en movimiento relativo. Suponer por simplicidad que, en el instante de la comparación, la partícula está en reposo relativo con respecto al observador  $O'$ .

**Solución:** La componente  $X$  de la aceleración de la partícula, medida por  $O'$ , es

$$\alpha_{x'} = \frac{dV_{x'}}{dt'} = \frac{dV_{x'}}{dt} \frac{dt}{dt'}.$$

Usando el valor de  $V'_x$  de la primera relación de la ec. (6.36) y reemplazando las derivadas apropiadas, tenemos

$$a'_{x'} = \left[ \frac{a_x}{1 - vV_x/c^2} + \frac{(V_x - v)va_x/c^2}{(1 - vV_x/c^2)^2} \right] \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vV_x/c^2} = a_x \frac{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}{(1 - vV_x/c^2)^3}$$

En el instante cuando la partícula se encuentra en reposo relativo con respecto a  $O'$ ,  $V_x = v$  y

$$a'_{x'} = \frac{a_x}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = k^3 a_x.$$

Por un análisis similar encontramos que

$$a'_{y'} = \frac{a_y}{1 - v^2/c^2} = k^2 a_y, \quad a'_{z'} = \frac{a_z}{1 - v^2/c^2} = k^2 a_z.$$

Este resultado difiere del de la ec. (6.14) de la transformación Galileana, ya que en este caso la aceleración no es la misma para ambos observadores en movimiento relativo uniforme. En otras palabras, el requisito de que la velocidad de la luz sea invariante en todos los sistemas de referencia que se encuentran en movimiento relativo uniforme destruye la invariancia de la aceleración.

Es importante conocer la relación entre las magnitudes de la aceleración observada por  $O$  y  $O'$ . Ahora

$$\begin{aligned} a'^2 &= a'^2_{y'} + a'^2_{z'} + a'^2_{x'} \\ &= \frac{a_y^2}{(1 - v^2/c^2)^2} + \frac{a_z^2}{(1 - v^2/c^2)^2} + \frac{a_x^2}{(1 - v^2/c^2)^3} \\ &= \frac{a_x^2 + (a_y^2 + a_z^2)(1 - v^2/c^2)}{(1 - v^2/c^2)^3} \\ &= \frac{a^2 - v^2(a_y^2 + a_z^2)/c^2}{(1 - v^2/c^2)^3}. \end{aligned}$$

Pero  $\mathbf{v} = u_x \mathbf{v}$  y  $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = -u_y v a_z + u_z v a_y$ , de modo que  $(\mathbf{v} \times \mathbf{a})^2 = v^2(a_y^2 + a_z^2)$ . Por consiguiente

$$a'^2 = \frac{a^2 - (\mathbf{v} \times \mathbf{a})^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)^3}. \quad (6.39)$$

que es la relación requerida. Cuando la aceleración es paralela a la velocidad,  $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = 0$  y  $a' = a/(1 - v^2/c^2)^{3/2}$ . Este resultado está de acuerdo con la relación entre  $a_x$  y  $a'_{x'}$ . Cuando la aceleración es perpendicular a la velocidad  $(\mathbf{a} \times \mathbf{v})^2 = v^2 a^2$  y  $a' = a/(1 - v^2/c^2)$  que coincide con la relación entre  $a_y, a_z$  y  $a'_{y'}, a'_{z'}$ .

## 6.8 Consecuencias de la transformación de Lorentz

El factor  $k = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  que aparece en la ec. (6.33) sugiere que las longitudes de los cuerpos y los intervalos de los tiempos entre eventos dados pueden no ser los mismos cuando se miden por observadores diferentes. Discutiremos ahora esta importante cuestión.

(1) **Contracción de la longitud.** La longitud de un objeto puede definirse como la distancia entre sus extremos. Sin embargo, si el objeto cuya longitud se mide se encuentra en movimiento relativo con respecto a un observador, las posiciones de sus dos extremos deben ser medidas *simultáneamente*. Consideremos una barra en reposo relativo a  $O'$  y paralela al eje  $O'X'$ . Designando sus dos extremos por  $a$  y  $b$ , su longitud medida por  $O'$  es  $L' = x'_b - x'_a$ . La simultaneidad no es necesaria para  $O'$  debido a que él ve la barra en reposo. Sin embargo, el observador  $O$ , quien ve la barra en movimiento, debe medir las coordenadas  $x_a$  y  $x_b$  de los extremos al mismo tiempo  $t$ , obteniendo  $L = x_b - x_a$ . Aplicando la primera relación en la ec. (6.33) encontramos que

$$x'_a = \frac{x_a - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

y

$$x'_b = \frac{x_b - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Nótese que escribimos el mismo tiempo en ambas expresiones. Ahora, sustrayendo

$$x'_b - x'_a = \frac{x_b - x_a}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{ó} \quad L = \sqrt{1 - v^2/c^2} L'. \quad (6.40)$$

Puesto que el factor  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  es menor que la unidad, tenemos una situación en la cual  $L$  es menor que  $L'$ , esto es el observador  $O$ , quien ve el objeto en movimiento, mide una longitud *menor* que el observador  $O'$ , quien ve el objeto en reposo. En otras palabras, los objetos en movimiento parecen más cortos; esto es  $L_{\text{movimiento}} < L_{\text{reposo}}$ .

(2) **Dilatación del tiempo.** Un intervalo de tiempo puede definirse como el tiempo que transcurre entre dos eventos, medido por un observador. Un *evento* es una ocurrencia específica que sucede en un punto particular del espacio y en un tiempo particular. Así, en función de estas definiciones, cuando la masa del péndulo alcanza su máxima altura durante una oscilación, esto constituye un evento. Después de un cierto período de tiempo retornará a esta misma posición; esto es un segundo evento. El tiempo transcurrido entre estos dos eventos es entonces un intervalo. Así un intervalo es el tiempo que toma hacer algo: oscilar para un péndulo, girar alrededor del núcleo para un electrón, desintegrarse para una partícula radioactiva, latir para un corazón, etc.

Consideremos dos eventos que ocurren en el mismo lugar  $x'$  con respecto a un observador  $O'$ . El intervalo entre estos eventos es  $T' = t'_b - t'_a$ . Para un observador  $O$  con respecto a quien  $O'$  se está moviendo con velocidad constante  $v$  en la dirección positiva de las  $X$ , el intervalo es  $T = t_b - t_a$ . Para encontrar la relación entre los tiempos en los cuales ocurren los dos eventos, registrados por ambos observadores, usamos la última de las ecs. (6.34). Esto nos da

$$t_a = \frac{t'_a + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t_b = \frac{t'_b + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Nótese que escribimos la misma  $x'$  en ambas expresiones. Por consiguiente, restando  $t_a$  de  $t_b$ , tenemos

$$t_b - t_a = \frac{t'_b - t'_a}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{ó} \quad T = \frac{T'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (6.41)$$

Ahora  $T'$  es el intervalo de tiempo medido por un observador  $O'$  en reposo con respecto al punto en el cual tienen lugar los eventos, y  $T$  es el intervalo de tiempo medido por un observador  $O$  relativo al cual el punto está en *movimiento* cuando los eventos ocurren. Esto es, el observador  $O$  ve que los eventos ocurren en dos posiciones diferentes del espacio. Puesto que el factor  $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  es mayor que uno, la ec. (6.41) indica que  $T$  es *mayor* que  $T'$ . Por consiguiente *los procesos parecen tomar más tiempo cuando ocurren en un cuerpo en movimiento relativo a un observador que cuando el cuerpo está en reposo relativo al observador; esto es  $T_{\text{movimiento}} < T_{\text{reposo}}$ .*

Es importante analizar la dilatación del tiempo y la contracción de la longitud en mayor detalle, ya que estos resultados son contrarios a nuestras expectativas *a priori*. Demostraremos en una manera más directa que la dilatación del tiempo y la contracción de la longitud son consecuencias directas de la invariancia (constancia) de la velocidad de la luz. Consideremos de nuevo a dos observadores  $O$  y  $O'$  en movimiento relativo a lo largo del eje  $X$  con velocidad  $v$ . En la Fig. 6-16,  $M'$  es un espejo en reposo relativo a  $O'$  y situado a una distancia  $L$  del origen a lo largo del eje  $Y'$ . Esta es la misma distancia medida por  $O$  ya que el espejo se encuentra en una posición perpendicular a la dirección del movimiento. Supongamos que, cuando  $O$  y  $O'$  coinciden se envía un rayo de luz desde su posición común hacia el espejo. Para el observador que ve el espejo en movimiento, la señal de luz debe enviarse haciendo un ángulo dependiente de la velocidad del espejo y la distancia  $L$ . Sean  $T$  y  $T'$  los tiempos registrados por  $O$  y  $O'$  para que la señal de luz retorne a  $O'$  después que se haya reflejado en el espejo. En el sistema  $O'$ , la luz retornará al origen, pero en el sistema  $O$  la luz cruzará el eje  $X$  a una distancia  $vT$  del origen. Con respecto a  $O'$ , la trayectoria de la señal de luz es  $O'M'O' = 2L$  y el tiempo transcurrido es  $T' = 2L/c$ , ya que  $O'$  mide la

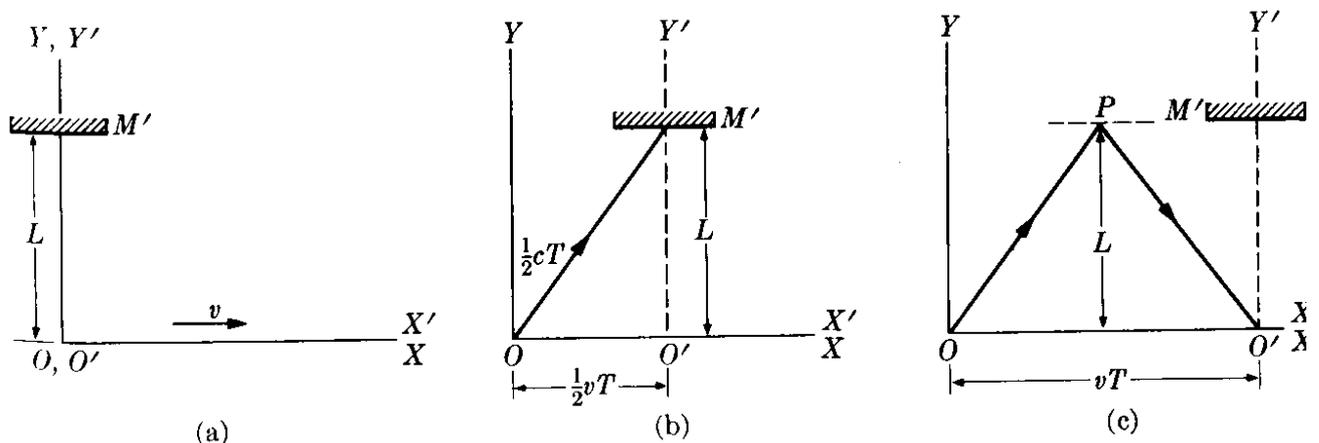


Figura 6-16

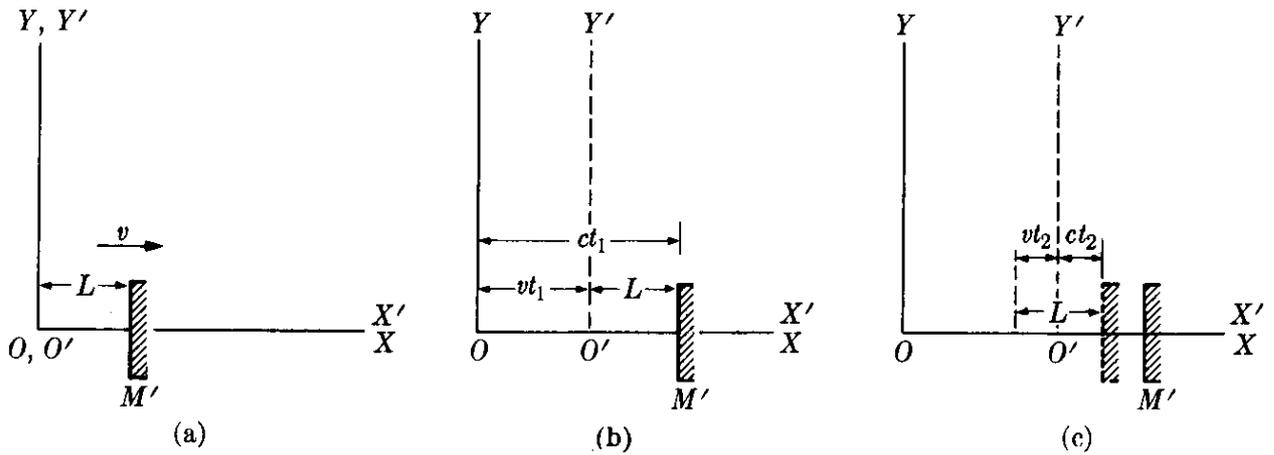


Figura 6-17

velocidad de la luz como  $c$ . Este intervalo de tiempo corresponde a dos eventos que tienen lugar en el mismo punto ( $O'$ ) respecto a  $O'$ .

Con respecto al observador  $O$ , quien mide la velocidad como  $c$ , la trayectoria de la señal es  $OPO'$ , y por ello  $O$  aplica la relación (de la Fig. 6-16b)  $(\frac{1}{2}cT) = (\frac{1}{2}vT)^2 + L^2$  o  $T = (2L/c)/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Por consiguiente  $T = T'/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , que es la ec. (6.41). Nótese que hemos obtenido la dilatación del tiempo requiriendo que la velocidad de la luz sea la misma para todos los observadores inerciales.

Consideremos ahora el espejo  $M'$  colocado a lo largo del eje  $X'$  y orientado perpendicularmente a él y a una distancia  $L'$  de  $O'$  y consideramos el espejo en reposo en el sistema  $O'$ . El conjunto se muestra en la Fig. 6-17. Nuevamente cuando  $O$  y  $O'$  coinciden se lanza una señal de luz hacia el espejo y se miden los tiempos  $T$  y  $T'$  que toma la luz en regresar a  $O'$ . El intervalo para  $O'$ , quien mide la velocidad de la luz como  $c$ , es  $T' = 2L'/c$ . La distancia  $O'M'$  puede no ser la misma para el observador  $O$ , y la llamaremos la distancia  $L$ . Ahora el tiempo  $t_1$ , para que la luz viaje de  $O$  al espejo se encuentra de la relación  $ct_1 = L + vt_1$  o  $t_1 = L(c - v)$ , ya que  $M'$  ha avanzado la distancia  $vt_1$ . Al reflejarse,  $O$  mide un tiempo  $t_2$  para que la luz llegue a  $O'$ , que se ha movido una distancia  $vt_2$  en aquel tiempo (ver Fig. 6-17c). Así  $ct_2 = L - vt_2$  o  $t_2 = L/(c + v)$ . El tiempo total necesario para que la luz llegue a  $O'$ , medido por  $O$ , es así

$$T = t_1 + t_2 = \frac{L}{c - v} + \frac{L}{c + v} = \frac{2L}{c} \frac{1}{1 - v^2/c^2}.$$

Pero  $T$  y  $T'$  corresponden a dos eventos que ocurren en el mismo lugar, con respecto a  $O'$ , y están relacionadas por consiguiente por la ec. (6.41), Así,

$$\frac{2L/c}{1 - v^2/c^2} = \frac{2L'/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{ó} \quad L = \sqrt{1 - v^2/c^2} L'.$$

Esta ecuación es idéntica a la ec. (6.40) ya que  $L'$  es una longitud en reposo con respecto a  $O'$ . De estos dos ejemplos, vemos que la constancia de la velocidad de la luz para todos los observadores inerciales afecta, en una manera muy particular, los resultados obtenidos por observadores en movimiento relativo.

**EJEMPLO 6.7.** *Análisis del experimento de Michelson-Morley.* Al principio de la sección 6.6, mencionamos el experimento de Michelson-Morley. Lo describiremos ahora sucintamente, y analizaremos los resultados. El arreglo experimental llamado interferómetro se muestra esquemáticamente en la Fig. 6-18, donde  $S$  es una fuente monocromática de luz y  $M_1$  y  $M_2$  son dos espejos colocados a la misma distancia  $L'$  (medida por un observador terrestre) de un espejo plateado  $P$ . La luz que proviene de  $S$ , cuando llega a  $P$ , es parcialmente transmitida hacia  $M_1$  y parcialmente reflejada hacia  $M_2$ . Los rayos reflejados en  $M_1$  y  $M_2$  regresan a  $P$  y eventualmente llegan al observador situado en  $O'$ . Nótese que la trayectoria de la luz dibujada en la Fig. 6-18 es con respecto al sistema  $X'Y'Z'$  que se mueve con la tierra y con respecto al cual el *interferómetro* está en reposo. Se sugiere como ejercicio que el estudiante dibuje la trayectoria de la luz vista por un observador respecto al cual la tierra se mueve con una velocidad  $v$ . El equipo experimental real usado por Michelson y Morley se ilustra en la Fig. 6-19.

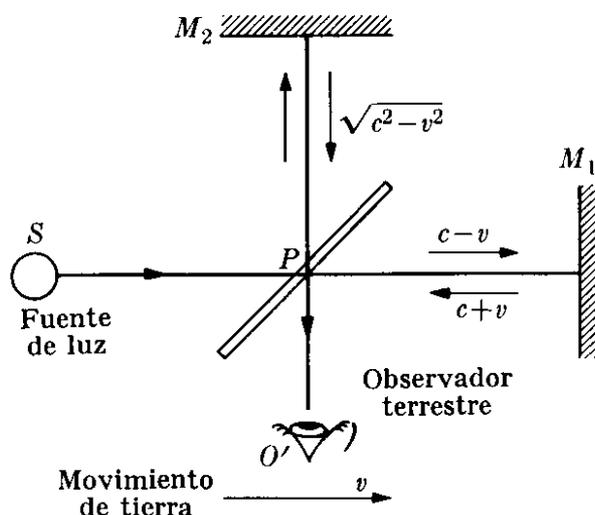


Fig. 6-18. Componentes básicos del experimento de Michelson-Morley.

**Solución:** Sea  $c$  la velocidad de la luz medida por un observador estacionario relativo al éter. Llamemos  $v$  a la velocidad de la tierra con respecto al éter, y orientemos el interferómetro de modo que la línea  $PM_1$  sea paralela al movimiento de la tierra.

Cuando usamos la transformación Galileana, encontramos, siguiendo los resultados del ejemplo 6.2, que con respecto a la tierra, la velocidad de la luz que va de  $P$  a  $M_1$  es  $c - v$ , la de  $M_1$  a  $P$  es  $c + v$  y la que va de  $P$  a  $M_2$  ó de  $M_2$  a  $P$  es  $\sqrt{c^2 - v^2}$ . Así el tiempo necesario para que la luz vaya de  $P$  a  $M_1$  y de regreso a  $P$ , medido por el observador terrestre  $O'$ , es

$$t'_{\parallel} = \frac{L'}{c - v} + \frac{L'}{c + v} = \frac{2L'c}{c^2 - v^2} = \frac{2L'/c}{1 - v^2/c^2},$$

mientras que el tiempo necesario para ir de  $P$  a  $M_2$ , y de regreso a  $P$ , medido por  $O'$ , es

$$t'_{\perp} = \frac{2L'}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L'/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Notamos que  $t'_{\parallel}$  y  $t'_{\perp}$  son diferentes, y por consiguiente los rayos que llegan al observador  $O'$  tienen una diferencia de trayectoria y (de acuerdo a la teoría presentada en el capítulo 22) debería dar por resultado un cierto patrón de interferencia. Sorprendentemente no se observa tal interferencia, como se indicó previamente en la sección 6.6 \* Esto sugiere que  $t'_{\parallel} = t'_{\perp}$ . Para resolver este dilema

\* En el experimento real realizado por Michelson, los dos brazos del interferómetro, o más precisamente las longitudes ópticas, eran ligeramente diferentes, dando por resultado un patrón de interferencia. Luego Michelson para compensar esta diferencia y realmente aumentar la precisión de sus mediciones, giró el instrumento  $90^\circ$  (Fig. 6-19). Y aunque la teoría, basada en la transformación Galileana, predecía un corrimiento en el patrón de interferencia como resultado de la rotación, no se observó tal corrimiento.

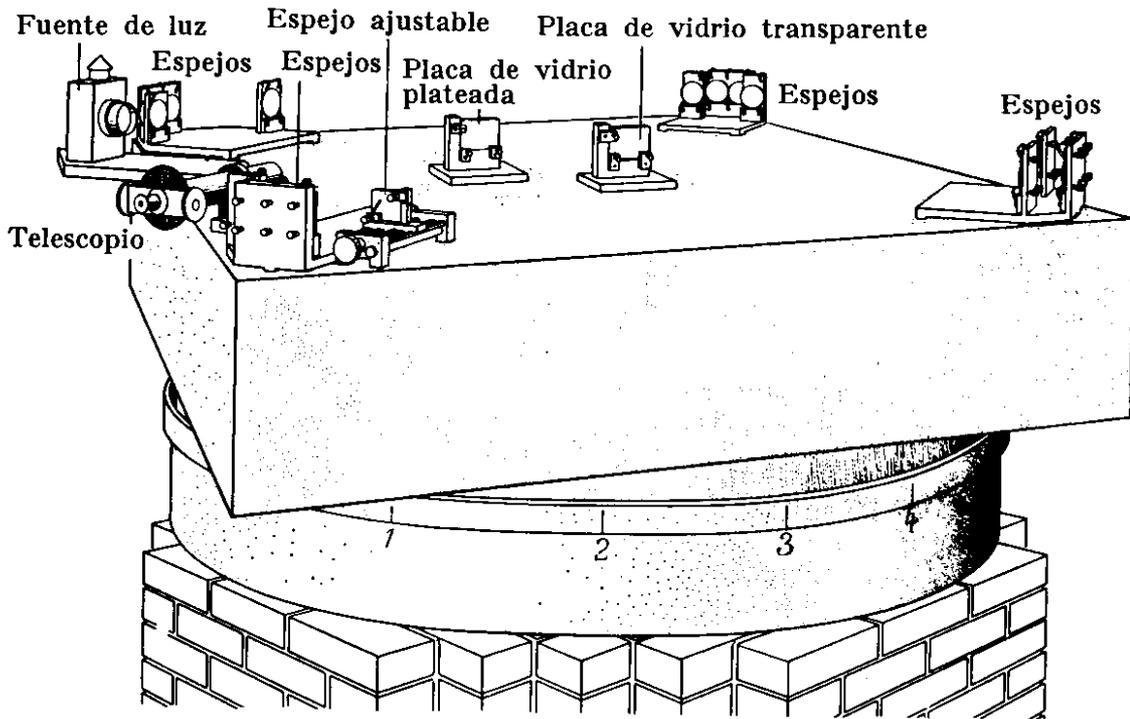


Fig. 6-19. Interferómetro usado por Michelson y Morley en sus mediciones de la velocidad de la luz. Una mesa de piedra que sostiene los espejos, se fija a un anillo de madera que flota en mercurio. La serie de espejos sirven para aumentar la trayectoria total de la luz. La placa no plateada se coloca a lo largo de una de las trayectorias para compensar el hecho de que la otra trayectoria debe pasar a través del vidrio del espejo. El telescopio permite observar las franjas de interferencia. (Dibujo cortesía de *Scientific American*.)

Lorentz, e independientemente Fitzgerald, propusieron que todos los objetos que se mueven a través del éter sufren una contracción "real" en la dirección del movimiento, y que esta contracción es suficiente para hacer que  $t'_{||} = t'_{\perp}$ . Esto significa que la longitud que aparece en  $t'_{||}$  no debe ser la misma longitud que aparece en  $t'_{\perp}$ , ya que la primera es en la dirección del movimiento de la tierra y la otra perpendicular a ella. Escribiendo  $L$  en lugar de  $L'$  en la expresión para  $t'_{||}$ , tenemos

$$t'_{||} = \frac{2L/c}{1 - v^2/c^2}.$$

Igualando  $t'_{||}$  y  $t'_{\perp}$ , obtenemos, después de simplificar,

$$L = \sqrt{1 - v^2/c^2} L'. \quad (6.42)$$

Esta expresión relaciona las longitudes  $PM_1$  y  $PM_2$  medidas por un observador  $O$  en reposo con respecto al éter. ¡El observador  $O'$  no debía notar esta contracción, debido a que la regla que usa para medir la distancia  $PM_1$  está también contraída en la misma proporción que  $PM_1$  cuando se le coloca en la dirección del movimiento de la tierra! Así, para él, las longitudes  $PM_1$  y  $PM_2$  son iguales. Pero el observador  $O$  reiría de las preocupaciones de  $O'$  ya que él se da cuenta que  $O'$  está en movimiento y, de acuerdo a la hipótesis de Lorentz-Fitzgerald, los objetos que él lleva se acortan en la dirección del movimiento. Así  $O$  concluye que la longitud "real" de  $PM_1$ , es  $L$  y la de  $PM_2$  es  $L'$ , siendo esta diferencia "real" en longitud la razón del resultado negativo obtenido al examinar la interferencia de los dos haces de luz.

Por supuesto, una explicación alternativa del resultado negativo del experimento de Michelson-Morley es suponer que la velocidad de la luz es la misma en todas

las direcciones no importa cuál sea el estado de movimiento del observador. Entonces el observador  $O'$  utiliza  $C$  para todas las trayectorias de la Fig. 6-18 y entonces  $t'_{\parallel} = t'_{\perp} = 2L'/C$ . Esta fue la posición adoptada por Albert Einstein cuando formuló su principio de relatividad. El estudiante puede, sin embargo, en este momento decir que la contracción "real" supuesta por Lorentz para explicar el resultado negativo es exactamente la misma que la contracción que encontramos en la ec. (6.40) usando la transformación de Lorentz y el principio de la invariancia de la velocidad de la luz. Hay, sin embargo, una diferencia fundamental entre las dos hipótesis usadas para obtener estos dos resultados aparentemente idénticos: (1) La contracción (6.42) obtenida por medio de la transformación Galileana, se supone que es una contracción *real* sufrida por todos los cuerpos que se mueven a través del éter, y la  $v$ , que aparece en la fórmula, es la velocidad del objeto con respecto al éter. (2) La contracción (6.40) se refiere sólo al valor *medido* de la longitud del objeto en movimiento con respecto al observador, y es una consecuencia de la invariancia de la velocidad de la luz. La  $v$  que aparece en la fórmula es la velocidad del objeto con respecto al observador y así la contracción es diferente para diferentes observadores. El gran ingenio de Einstein lo llevó a comprender que la idea del éter era artificial e innecesaria, y que la explicación lógica era la segunda. Este fue el postulado básico que Einstein utilizó para formular el principio de la relatividad como veremos en el capítulo 11.

## Bibliografía

1. "The Coriolis Effect", J. McDonald, *Sci. Am.*, mayo de 1952, pág. 72
2. "The Speed of Light", J. Rush, *Sci. Am.*, agosto de 1955, pág. 62
3. "The Clock Paradox", J. Bronowski, *Sci. Am.*, febrero de 1963, pág. 134
4. "Conversations with Albert Einstein", R. Shankland, *Am. J. Phys.* **31**, 47 (1963)
5. "Michelson-Morley Experiment", R. Shankland, *Am. J. Phys.* **32**, pág. 16 (1964); *Sci. Am.*, noviembre de 1964, pág. 107
6. "Measurement of the Relativistic Time Dilation Using  $\mu$ -Mesons", D. Frisch y J. Smith, *Am. J. Phys.* **31**, 342 (1963)
7. "The Geometrical Appearance of Large Objects Moving at Relativistic Speeds", G. D. Scott y M. R. Viner, *Am. J. Phys.* **33**, 534 (1965)
8. "Visual Appearance of Rapidly Moving Objects", V. Weisskopf, *Physics Today*, septiembre de 1960, pág. 24
9. "Resource Letter SRT-1 on Special Relativity Theory", G. Holton, *Am. J. Phys.* **30**, 462 (1962)
10. *An Introduction to the Special Theory of Relativity*, R. Katz. Princeton, N. J.: Momentum Books, D. Van Nostrand Co., 1964
11. *The Special Theory of Relativity*, U. Bohm. New York: W. A. Benjamin, 1964
12. *An Introduction to the Special Theory of Relativity*, W. G. W. Rossen. London: Butterworth & Co. 1964, caps. 1-4
13. *Special Relativity Theory*, separatas escogidas del *Am. J. Phys.*, editado por el AIP (335 E. 45th. St., New York 17, N. Y.), 1962
14. *Mechanics*, Keith R. Symon. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1960, secciones 7-1 a 7-4

15. *Physical Mechanics*, Robert B. Lindsay. New York : Van Nostrand, 1961, secciones 7-11 y 7-12
16. *Vector Mechanics*, D. E. Christie. New York : McGraw-Hill, 1964, cap. 14
17. *The Feynman Lectures on Physics*, vol. I, R. P. Feynman, R. B. Leighton y M. L. Sands. Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1963, caps. 15, 18 y 20
18. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Cambridge, Mass. : Harvard University Press, 1963, pág. 27 (Huygens) ; pág. 369 (Michelson y Morley)

## Problemas

- 6.1 Dos trenes, *A* y *B* se desplazan en rieles paralelos a  $70 \text{ km hr}^{-1}$  y a  $90 \text{ km hr}^{-1}$ , respectivamente. Calcular la velocidad relativa de *B* con respecto a *A*, cuando: (a) se mueven en la misma dirección, (b) cuando se mueven en direcciones opuestas.
- 6.2 Resolver el problema anterior si los rieles hacen entre sí un ángulo de  $60^\circ$ .
- 6.3 Un tren sale de la ciudad *A* a las 12 del día yendo hacia la ciudad *B*, situada a 400 km de distancia, con una velocidad constante de  $100 \text{ km hr}^{-1}$ . Otro tren sale de *B* a las 2,00 p.m. y mantiene una velocidad constante de  $70 \text{ km hr}^{-1}$ . Determinar el tiempo en el cual los trenes se encuentran y la distancia medida a partir de la ciudad *A* si (a) el segundo tren se dirige hacia *A*, y (b) el segundo tren se aleja de *A*.
- 6.4 Un hombre que guía a través de una tormenta a  $80 \text{ km hr}^{-1}$  observa que las gotas de lluvia dejan trazas en las ventanas laterales haciendo un ángulo de  $80^\circ$  con la vertical. Cuando él detiene su auto, observa que la lluvia está cayendo realmente en forma vertical. Calcular la velocidad relativa de la lluvia con respecto al auto (a) cuando está detenido, y (b) cuando se desplaza a  $80 \text{ km hr}^{-1}$ .
- 6.5 Dos autos que se desplazan en caminos perpendiculares viajan hacia el norte y el este respectivamente. Si sus velocidades con respecto a la tierra son de  $60 \text{ km hr}^{-1}$  y de  $80 \text{ km hr}^{-1}$ , calcular su velocidad relativa. ¿Depende la velocidad relativa de la posición de los autos en sus respectivos caminos? Repetir el problema, suponiendo que el segundo auto se desplaza hacia el oeste.
- 6.6 Un bote se mueve en la dirección  $N 60^\circ W$  a  $4,0 \text{ km hr}^{-1}$  con respecto al agua. La corriente tiene tal dirección que el movimiento resultante con respecto a la tierra es hacia el oeste a  $5 \text{ km hr}^{-1}$ . Calcular la velocidad y la dirección de la corriente con respecto a la tierra.
- 6.7 La velocidad de un bote de carrera en agua quieta es de  $55 \text{ km hr}^{-1}$ . El piloto desea dirigirse a un punto situado a  $80 \text{ km S } 20^\circ E$ . La corriente es muy fuerte a  $20 \text{ km hr}^{-1}$  en la dirección  $S 70^\circ N$ . (a) Calcular en qué dirección debe ser dirigido el bote de modo que se desplace directamente hacia el punto deseado. (b) Determinar el tiempo requerido para el viaje.
- 6.8 Un río fluye hacia el norte a una velocidad de  $3 \text{ km hr}^{-1}$ . Un bote se dirige al este con una velocidad relativa al agua de  $4 \text{ km hr}^{-1}$ . (a) Calcular la velocidad del bote con respecto a la tierra. (b) Si el río tiene 1 km de ancho, calcular el tiempo necesario para realizar el cruce. (c) ¿Cuál es la desviación hacia el norte del bote cuando llegue a la otra orilla del río?
- 6.9 Dos lugares, *A* y *B*, en la orilla de un río perfectamente recto, están separados a 1 km. Un hombre va de *A* a *B* y de regreso hacia *A* en un bote de remos que se desplaza a  $4 \text{ km hr}^{-1}$  con respecto al río. Otro hombre camina a lo largo de la orilla de *A* hacia *B* y de regreso a  $4 \text{ km hr}^{-1}$ . Si el río fluye a  $2 \text{ km hr}^{-1}$  calcular el tiempo que demora

cada hombre para realizar el viaje completo.

6.10 Usando los datos del problema anterior, determinar la velocidad del río de modo que la diferencia entre los tiempos de recorrido sea de 6 minutos.

6.11 Un río tiene 1 km de ancho. La velocidad de la corriente es de 2 km hr<sup>-1</sup>. Determinar el tiempo que demoraría un hombre para llevar y traer, remando, un bote a través del río de una orilla a la otra. Comparar este tiempo con el que le tomaría a un hombre para remar 1 km en la dirección de la corriente y regresar nuevamente. El bote a remos se mueve con una velocidad constante de 4 km hr<sup>-1</sup> con respecto al agua.

6.12 Usando los datos del problema anterior determinar la velocidad de la corriente si la diferencia de tiempos entre los dos recorridos completos es de 10 minutos.

6.13 Dado un sistema de coordenadas fijo en la tierra (suponer que la tierra es plana y no tiene movimiento), considerar una bala con una velocidad de 800 pies s<sup>-1</sup> disparada desde la cola de un aeroplano que se desplaza a 700 pies s<sup>-1</sup> (aproximadamente 440 mi hr<sup>-1</sup>). Describir el movimiento de la bala (a) en el sistema de coordenadas de la tierra, (b) en el sistema de coordenadas del aeroplano, (c) calcular el ángulo bajo el cual el cañón debe apuntar de modo que la componente horizontal de la velocidad de la bala sea nula en el sistema de coordenadas de la tierra.

6.14 La posición de una partícula  $Q$  en un sistema de coordenadas  $O$  se mide por  $\mathbf{r} = u_x(6t^2 - 4t) + u_y(-3t^2) + u_z 3$  m. (a) Determinar la velocidad relativa constante del sistema  $O'$  con respecto a  $O$  si la posición de  $Q$  se mide por  $\mathbf{r}' = u_x(6t^2 + 3t) + u_y(-3t^2) + u_z 3$  m. (b) Demostrar que la aceleración de la partícula es la misma en ambos sistemas.

6.15 Un tren pasa por una estación a 30 m s<sup>-1</sup>. Una bola rueda sobre el piso del tren con una velocidad de 15 m s<sup>-1</sup> dirigida (a) en la dirección del movimiento del tren, (b) en la dirección opuesta y (c) en dirección perpendicular

a la del tren. Encontrar, en cada caso, la velocidad de la bola con respecto a un observador parado en la plataforma de la estación.

6.16 Una partícula con una velocidad de 500 m s<sup>-1</sup> con respecto a la tierra se dirige hacia el Sur a 45° latitud N. (a) Calcular la aceleración centrífuga de la partícula. (b) Calcular la aceleración de Coriolis de la partícula. (c) Repetir el problema para la posición de 45° latitud S.

6.17 Un cuerpo cae desde una altura de 200 m en un punto cuya latitud es de 41° N. Encontrar la desviación hacia el este con respecto al punto directamente debajo del punto de partida. Repetir este problema para un punto situado en una latitud 41° S.

6.18 Un río fluye hacia el sur a una velocidad de 9 km/hr en un lugar cuya latitud es 45°N (S). Encontrar la aceleración de Coriolis. Demostrar que en el hemisferio Norte (Sur) empuja el agua hacia la margen derecha (izquierda). Este defecto produce una mayor erosión en la rivera derecha (izquierda) que se ha notado en algunos casos.

6.19 Ud. está volando sobre el ecuador hacia el este en un jet a 450 m s<sup>-1</sup> (cerca de 1000 mi hr<sup>-1</sup>). ¿Cuál es su aceleración de Coriolis?

6.20 El planeta Júpiter que rota sobre su eje con un período de 9 hr 51 min, tiene un radio de aproximadamente  $7 \times 10^4$  km, y la aceleración debida a la gravedad en su superficie es de 26,5 m s<sup>-2</sup>. ¿Cuál es la máxima desviación de la plomada de la dirección radial en la superficie de Júpiter?

6.21 Comparar los valores de la aceleración de la gravedad dada por la tabla 6-1 con los valores teóricos de la ec. (6.29).

6.22 Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad  $v_0$ . Demostrar que caerá en un punto desplazado hacia el oeste a una distancia igual a  $(\frac{4}{3})\omega \cos \lambda \sqrt{8h^3/g}$ , siendo  $h = v_0^2/2g$ .

6.23 Obtener las expresiones de la velocidad y aceleración de un punto registradas por dos observadores  $O$  y  $O'$  que se mueven con velocidad angular

relativa  $\omega$ , cuando  $\omega$  no es constante. Considerar este problema cuando los orígenes coinciden y cuando no coinciden.

- 6.24 Dos observadores  $O$  y  $O'$  se encuentran en movimiento de traslación relativo con  $v = 0,6c$ . (a) El observador  $O$  ve una varilla en reposo alineada paralelamente al movimiento, y que mide 2,0 m. ¿Qué longitud tiene la varilla de acuerdo a  $O'$ ? (b) Si la misma varilla está en reposo en  $O'$ , y está alineada paralelamente al movimiento, ¿qué larga es de acuerdo a  $O$  y  $O'$ ?
- 6.25 Determinar la velocidad relativa de una varilla que tiene una longitud medida igual a la mitad de su longitud en reposo.
- 6.26 ¿Cuál es la magnitud del diámetro de la tierra para un observador situado en el sol? (La velocidad orbital de la tierra con respecto al sol es de  $30 \text{ km s}^{-1}$ , y el radio de la tierra se da en la tabla 13-1.)
- 6.27 Una nave espacial que se dirige hacia la luna pasa la tierra con una velocidad relativa de  $0,8c$ . (a) ¿Qué tiempo demora el viaje de la tierra a la luna, de acuerdo a un observador terrestre? (b) ¿Cuál es la distancia tierra-luna, de acuerdo a un pasajero de la nave? ¿Qué tiempo demora el viaje, de acuerdo con el pasajero?
- 6.28 La vida media de un neutrón, como partícula libre en reposo es de 15 min. Se desintegra espontáneamente en un electrón, un protón y un neutrino. ¿Cuál es la velocidad mínima promedio con la cual un neutrón debe dejar el sol a fin de llegar a la tierra antes de desintegrarse?
- 6.29 Un mesón  $\mu$  es una partícula inestable cuya vida media es de  $2 \times 10^{-6} \text{ s}$  medida por un observador en reposo con respecto al mesón. ¿Cuál será la vida media con respecto a un observador que ve el mesón moverse con una velocidad de  $0,9c$ ? Si se produce una gran cantidad de mesones en un cierto punto de la atmósfera pero solamente el 1 % alcanza la superficie terrestre, estimar la altura del punto en el cual se originaron los mesones.
- 6.30 Un núcleo radioactivo se mueve a una velocidad de  $0,1c$  con respecto al laboratorio cuando emite un electrón con una velocidad  $0,8c$  con respecto al núcleo. ¿Cuál es la velocidad y la dirección del electrón con respecto al laboratorio si, con respecto a un sistema de referencia situado en el núcleo, el electrón es emitido (a) en la dirección del movimiento, (b) en la dirección opuesta, (c) en la dirección perpendicular?
- 6.31 Los observadores  $O$  y  $O'$  están en movimiento de traslación relativa con  $v = 0,6c$ , y coincide cuando  $t = t' = 0$ . Cuando han transcurrido cinco años, de acuerdo a  $O$ , cuánto demora en llegar una señal de  $O$  a  $O'$ ? Con esta información conocida por  $O$  y  $O'$ , qué tiempo ha transcurrido de acuerdo a  $O'$  desde que  $O$  y  $O'$  coincidieron? Una señal de luz colocada en  $O$  es encendida durante un año. ¿Qué tiempo está encendida de acuerdo a  $O'$ ?
- 6.32 Resolver el problema anterior, cuando el movimiento de traslación es de  $0,9c$ .
- 6.33 Un cohete, cuya longitud en reposo es de 60 m, se aleja de la tierra. El cohete tiene espejos en cada extremo. Una señal de luz, enviada desde la tierra se refleja en ambos espejos. La primera señal es recibida después de 200 s y la segunda,  $1,74 \mu\text{s}$  más tarde. Encontrar la distancia a que se encuentra el cohete de la tierra y su velocidad con respecto a la tierra.
- 6.34 Un astronauta desea ir a una estrella situada a cinco años luz. Calcular la velocidad de su cohete con respecto a la tierra de modo que el tiempo, medido por el reloj del astronauta, sea un año luz. ¿Cuál será el tiempo registrado para esta misión por un observador terrestre?
- 6.35 Un estudiante toma un examen que tendrá una duración de una hora según el reloj de su profesor. El profesor se mueve a una velocidad  $0,97c$  con respecto al estudiante y envía una señal de luz cuando su reloj marca una hora. El estudiante deja de escribir cuando recibe la señal. ¿Qué tiempo tuvo el estudiante para el examen?

6.36 Un científico desea utilizar el método de Michelson-Morley para medir la velocidad del viento, enviando señales sonoras en dos direcciones perpendiculares. El supone que la velocidad del sonido es de  $300 \text{ m s}^{-1}$  y que la longitud de su recorrido es de  $100 \text{ m}$ . ¿Cuál es la mínima velocidad del viento que puede descubrir si puede medir una diferencia de tiempos  $\Delta t \leq 0,001 \text{ s}$ ?

6.37 Demostrar que la transformación general de Lorentz cuando los ejes de coordenadas utilizadas por  $O$  y  $O'$  no son paralelos a la velocidad relativa es

$$\sqrt{1 - V'^2/c^2} = \frac{\sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - V^2/c^2)}}{1 - vV_x/c^2}$$

y

$$\sqrt{1 - V^2/c^2} = \frac{\sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - V'^2/c^2)}}{1 + vV'_x/c^2}$$

6.39 Demostrar que la transformación general de la aceleración de una partícula medida por  $O$  y  $O'$ , cuando la partícula se mueve con velocidad  $V$  relativa a  $O$ , es

$$a'_x = \frac{a_x(1 - v^2/c^2)^{3/2}}{(1 - vV_x/c^2)^3},$$

$$a'_y = \frac{1 - v^2/c^2}{(1 - vV_x/c^2)^2} \left( a_y + a_x \frac{vV_y/c^2}{1 - vV_x/c^2} \right),$$

$$a'_z = \frac{1 - v^2/c^2}{(1 - vV_x/c^2)^2} \left( a_z + a_x \frac{vV_z/c^2}{1 - vV_x/c^2} \right).$$

6.40 Demostrar que cuando  $v$  es casi igual a  $c$ , entonces  $k \approx 1/\sqrt{2(1 - v/c)}$ , y que cuando  $v$  es muy pequeña comparada con  $c$ , entonces  $k \approx 1 + v^2/2c^2$ .

6.41 Una caja cúbica de lado  $L_0$  medida por un observador  $O'$  en reposo con respecto a la caja, se mueve con una velocidad  $v$  paralela a una arista con respecto a otro observador  $O$ . Demostrar que el volumen medido por  $O$  es  $L_0^3\sqrt{1 - v^2/c^2}$ .

6.42 Una partícula se mueve relativamente a un observador  $O$  de modo que su posición en el tiempo  $t$  está dada por  $x = vt$ ,  $y = \frac{1}{2}at^2$  y su trayectoria es una parábola. Describir su movimiento con respecto a un observador  $O'$  quien se mueve con respecto a  $O$  con una velocidad  $v$ . En particular, encontrar su trayectoria y su aceleración.

6.43 Una varilla de un metro forma un ángulo de  $45^\circ$  con respecto a la direc-

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (k - 1) \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2} - k\mathbf{v}t,$$

$$t' = k(t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}/c^2).$$

[Ayuda: Descomponer los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}'$  en componentes paralelas y perpendiculares a  $\mathbf{v}$ ; note que  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{\parallel} + \mathbf{r}'_{\perp}$  y que  $\mathbf{r}_{\parallel} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}/v^2$ .]

6.38 Demostrar que si  $V$  y  $V'$  son las magnitudes de la velocidad de una partícula medida por los observadores  $O$  y  $O'$  que se desplazan a lo largo del eje  $X$  con velocidad relativa  $v$ , entonces

ción de movimiento en un sistema móvil de coordenadas. ¿Cuál es su longitud y su orientación, medida en el sistema del laboratorio, si el sistema en movimiento tiene una velocidad de  $0,8c$ ?

6.44 *Discusión de simultaneidad.* (a) Demostrar que si dos eventos tienen lugar con respecto a un observador  $O$  en los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  y en los lugares  $x_1$  y  $x_2$ , y si  $T = t_2 - t_1$ ,  $L = x_2 - x_1$ , los eventos ocurren para el observador  $O'$  (moviéndose con respecto a  $O$  con velocidad  $v$  a lo largo del eje  $X$ ) en los tiempos  $t'_1$  y  $t'_2$  tales que, si

$$T' = t'_2 - t'_1,$$

entonces

$$T' = k(T - vL/c^2).$$

(b) ¿En general, son los eventos que aparecen como simultáneos a  $O$ , simultáneos a  $O'$ ? ¿Bajo qué condiciones son los eventos que aparecen simultáneos a  $O$  también simultáneos a todos los

observadores que se mueven con movimiento relativo? (c) Obtener la relación entre  $L$  y  $T$  de modo que el orden en el cual suceden los dos eventos, observados por  $O'$ , se invierten con respecto a  $O$ . (d) Suponer que los eventos  $(x_1, t_1)$  y  $(x_2, t_2)$  observados por  $O$  son el resultado de alguna señal transmitida de  $(x_1, t_1)$  con velocidad  $V = L/T$ , por necesidad

menor que o igual a  $c$ . ¿Puede el orden de los eventos aparecer invertido para  $O'$ ? [Notar que si la respuesta es afirmativa entonces la teoría requiere que  $V > C$ .]

6.45 Demostrar que la ley de transformación de velocidades puede escribirse en la forma vectorial de la siguiente manera:

$$\mathbf{v}' = \frac{1}{k(1 - \mathbf{V} \cdot \mathbf{v}/c^2)} \left[ \mathbf{v} + (k - 1) \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v} - k\mathbf{v} \right].$$

6.46 Demostrar que la ley de transformación de aceleraciones puede escribirse en la forma vectorial de la siguiente manera:

$$\mathbf{a}' = \frac{1}{k^3(1 - \mathbf{V} \cdot \mathbf{v}/c^2)^3} \left[ \mathbf{a} + \left( \frac{1}{k} - 1 \right) \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{V}) \right].$$