3
VECTORES

3.1 Introducción

3.2 Concepto de dirección

3.3 Escalares y vectores

3.4 Adición de vectores

3.5 Componentes de un vector

3.6 Adición de varios vectores

3.7 Aplicación a problemas de cinemática

3.8 Producto escalar

3.9 Producto vectorial

3.10 Representación vectorial de una superficie

3.1 Introducción

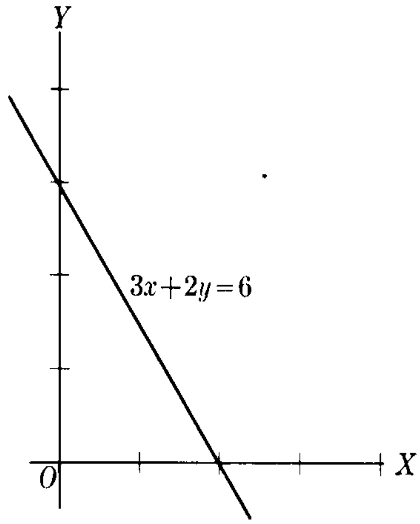


Figura 3-1

Este capítulo servirá como una introducción, o repaso, de las ideas esenciales asociadas con una rama de las matemáticas muy importante para el físico. El álgebra vectorial es importante porque permite escribir en una forma conveniente y abreviada algunas expresiones muy complicadas. Por ejemplo, en álgebra elemental la ecuación

$$3x + 2y = 6$$

es una notación abreviada para todos los posibles pares de valores x- e y- que satisfagan esta ecuación. Es también posible describir esta misma relación de otra manera: mostrando un gráfico de esta ecuación como el de la figura 3-1. Ambos ejemplos son fácilmente comprensibles para cualquier estudiante que haya estudiado álgebra y geometría analítica, porque puede comprender la notación abreviada. En la misma forma, el álgebra vectorial es fácilmente comprensible, una vez que la notación abreviada ha sido entendida.

Al finalizar el capítulo se descubrirá que la notación vectorial no es diferente de la notación del álgebra y de la geometría analítica. La mayor diferencia está en la interpretación de esta notación. Una lectura meditada del capítulo acompañada por una solución cuidadosa de todos los ejercicios ahorrará al estudiante muchos momentos difíciles en los capítulos siguientes.

3.2 Concepto de dirección

Cuando tenemos una línea recta, podemos movernos a lo largo de ella en dos sentidos opuestos, dichos sentidos se distinguen asignando a cada uno de ellos un signo, positivo o negativo. Una vez que el sentido positivo ha sido determinado, decimos que la línea está orientada y la llamamos un eje. Los ejes coordenados X e Y son líneas orientadas en las cuales los sentidos positivos se han indicado

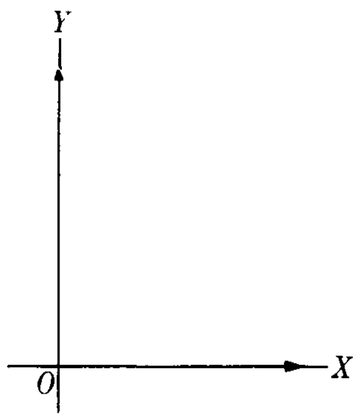


Fig. 3-2. Ejes coordenados orientados.

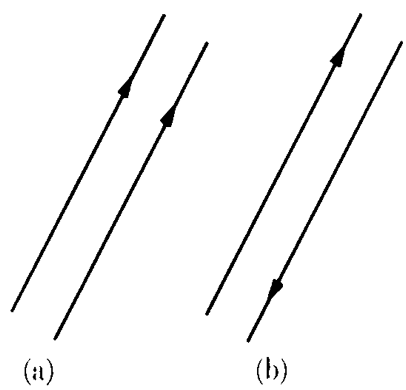


Fig. 3.3 Direcciones paralelas y antiparalelas.

en la Fig. 3-2. El sentido positivo se indica usualmente por una flecha. Una línea orientada define una *dirección*. Las líneas paralelas orientadas en el mismo sentido definen la misma dirección (Fig. 3-3a), pero si tienen diferentes orientaciones definen direcciones opuestas (Fig. 3-3b).

Las direcciones en un plano se determinan por un ángulo, que es el ángulo entre una dirección de referencia y la dirección que deseamos indicar, medido en dirección contraria al movimiento de las agujas del reloj (Fig. 3-4). Las direcciones opuestas corresponden a los ángulos θ y $\pi + \theta$ (ó $180° + \theta$).

En el espacio es necesario usar dos ángulos para determinar una dirección. La selección más frecuente es la usada en la Fig. 3-5. La dirección OA se determina por:

(i) el ángulo θ (menor que 180°) que OA hace con el eje OZ,
(ii) el ángulo ϕ entre el plano AOZ y el plano XOZ, medido en dirección contraria a la dirección de las agujas del reloj.

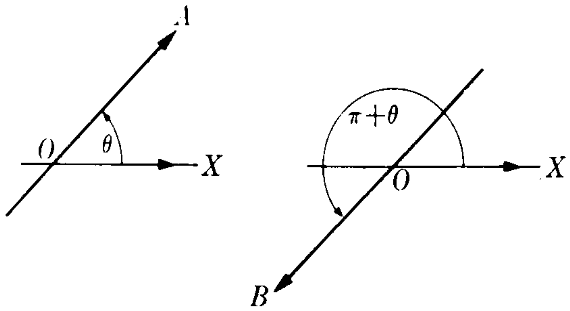


Fig. 3-4. En un plano, direcciones opuestas están definidas por los ángulos θ y $\pi + \theta$.

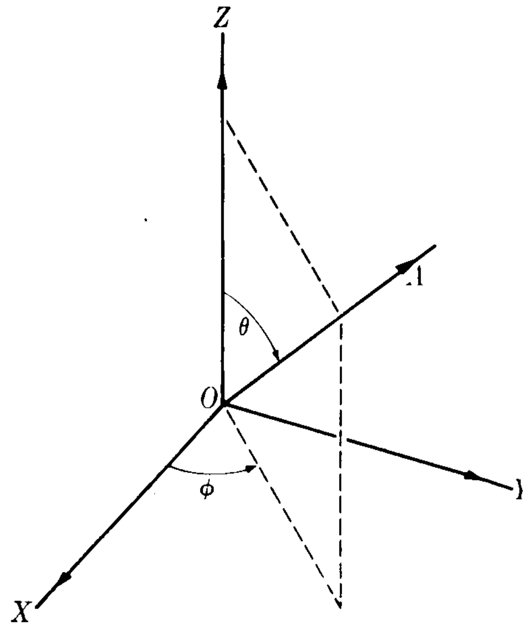


Fig. 3-5. Se requieren dos ángulos para definir una dirección en el espacio.

Dejamos al estudiante como tarea verificar que la dirección opuesta está determinada por los ángulos $\pi - \theta$ y $\pi + \phi$.

3.3 *Escalares y vectores*

Muchas cantidades físicas quedan completamente determinadas por su magnitud, expresada en alguna unidad conveniente. Dichas cantidades se llaman *escalares*. Por ejemplo, para especificar el volumen de un cuerpo es necesario solamente indicar cuántos metros o pies cúbicos ocupa. Para conocer una temperatura es suficiente leer un termómetro convenientemente colocado. El tiempo, la masa, la carga y la energía son también cantidades escalares.

Otras magnitudes físicas requieren para su completa determinación, que se añada una dirección a su magnitud. Dichas cantidades las llamamos *vectores*. El caso más sencillo es el *desplazamiento*. El desplazamiento de un cuerpo se determina por la *distancia* efectiva que se ha movido y la *dirección* en la cual se ha movido. Por ejemplo, si una partícula se desplaza de O a A (Fig. 3-6), el desplazamiento queda determinado por la distancia $d = 5$ y el ángulo $\theta \cong 37°$. La velocidad es también una cantidad vectorial, desde que el movimiento se determina por la rapidez del desplazamiento y la dirección del desplazamiento. Análogamente la fuerza y la aceleración son cantidades vectoriales. Otras magnitudes físicas que son vectores irán apareciendo en capítulos sucesivos.

Los vectores se representan gráficamente por segmentos de una línea recta que tienen la misma dirección que el vector (indicada por una flecha) y una longitud proporcional a la magnitud. En la escritura, un símbolo en tipo grueso como la $\boldsymbol{V}$ o en tipo delgado con una flecha encima como $\vec{V}$, indica un vector (esto es magnitud más dirección), mientras que V se refiere a la magnitud solamente (algunas veces, sin embargo, la magnitud se indicará por $|\boldsymbol{V}|$). Un vector unitario es un vector cuya magnitud es uno. Un vector $\boldsymbol{V}$ paralelo al vector unitario $\boldsymbol{u}$ se puede expresar en la forma

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{u}V. \tag{3.1}$$

El negativo de un vector es otro vector que tiene la misma magnitud pero dirección opuesta.

Si dos vectores $\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{V}'$ son paralelos entre sí, se pueden escribir como $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{u}V$ y $\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{u}V'$, donde el vector unitario es el mismo. De esta manera si $\lambda = V/V'$ podemos escribir

$$\boldsymbol{V} = \lambda \boldsymbol{V}'.$$

Recíprocamente, siempre que una ecuación como la precedente valga para dos vectores $\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{V}'$, dichos vectores son paralelos.

3.4 *Adición de vectores*

Para comprender la regla de adición de vectores consideraremos primero el caso de los desplazamientos. Si una partícula se desplaza primero de A a B (Fig. 3-7), lo que se representa por el vector $\boldsymbol{d}_1$, y entonces de B a C, o $\boldsymbol{d}_2$, el resultado es equivalente a un desplazamiento único de A a C, o $\boldsymbol{d}$, el que escribimos simbólicamente como $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_2$. Esta expresión no debe confundirse con $d = d_1 + d_2$, que se refiere solamente a las magnitudes y no valen para este caso. El procedimiento se puede generalizar para cualquier clase de vectores. Por consiguiente decimos que $\boldsymbol{V}$ es la suma de $\boldsymbol{V}_1$ y $\boldsymbol{V}_2$ si es que se obtiene como se indica en la Fig. 3-8. Podemos también ver en la figura que la suma vectorial es conmutativa, siendo el resultado el mismo cualquiera que sea el orden en que los vectores se sumen; esto es una consecuencia directa de la geometría del método. La relación geométrica de la Fig. 3-8 se expresa algebraicamente por

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2. \tag{3.2}$$

Para calcular la magnitud de $\boldsymbol{V}$ notamos de la figura 3-9 que $(AC)^2 = (AD)^2 + (DC)^2$.

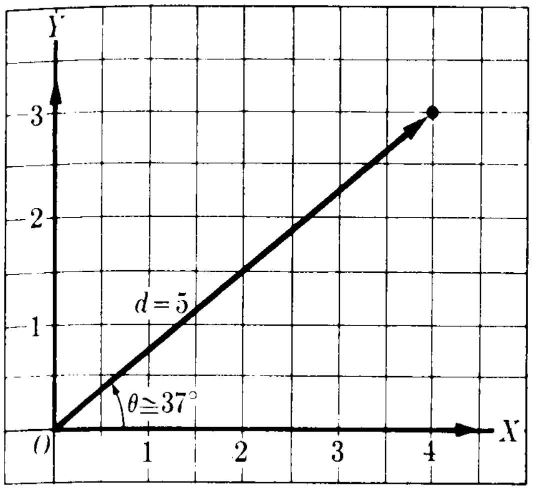


Fig. 3-6. El desplazamiento es una cantidad vectorial.

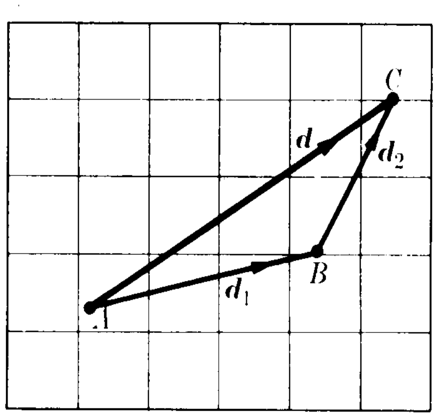


Fig. 3-7. Suma vectorial de dos desplazamientos.

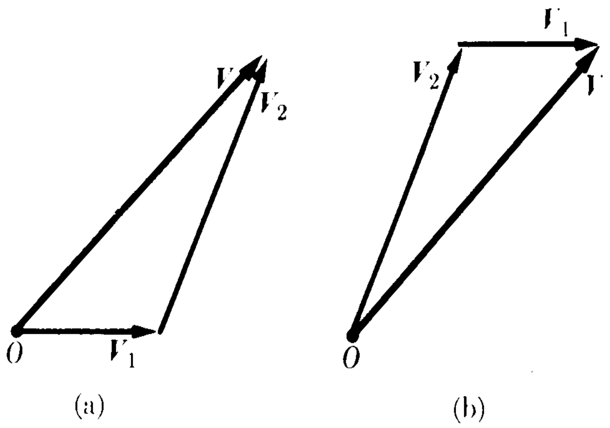


Fig. 3-8. La suma de vectores es conmutativa.

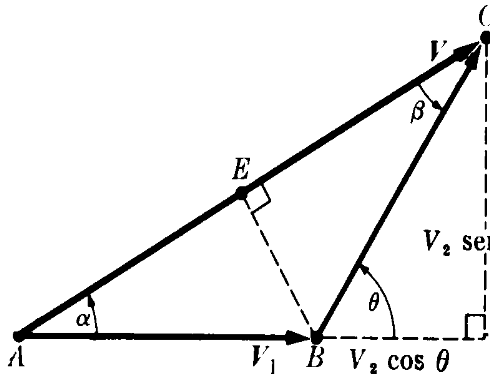


Figura 3-9

Pero $AD = AB + BD = V_1 + V_2 \cos \theta$ y $DC = V_2$ sen θ. Por consiguiente $V^2 =$ $= (V_1 + V_2 \cos \text{de } \theta)^2 + (V_2 \text{ sen } \theta)^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2 \cos \theta$, ó

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2 \cos \theta}. \tag{3.3}$$

Para determinar la dirección de $\boldsymbol{V}$, necesitamos solamente hallar el ángulo α. En la figura vemos que el triángulo ACD, $CD = AC$ sen α, y que en el triángulo BDC, $CD = BC$ sen θ. Por consiguiente V sen $\alpha = V_2$ sen θ ó

$$\frac{V}{\text{sen } \theta} = \frac{V_2}{\text{sen } \alpha}.$$

Análogamente, $BE = V_1$ sen $\alpha = V_2$ sen β ó

$$\frac{V_2}{\text{sen } \alpha} = \frac{V_1}{\text{sen } \beta}.$$

Combinando ambos resultados, obtenemos la relación simétrica

$$\frac{V}{\text{sen } \theta} = \frac{V_1}{\text{sen } \beta} = \frac{V_2}{\text{sen } \alpha}. \tag{3.4}$$

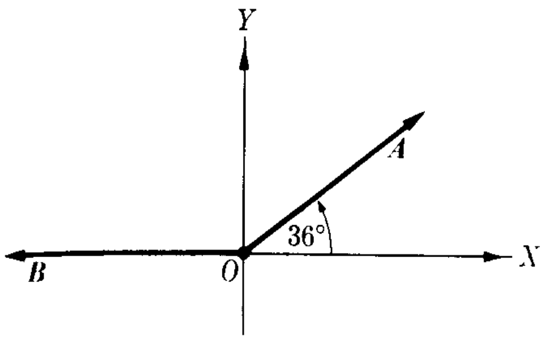


Figura 3-12

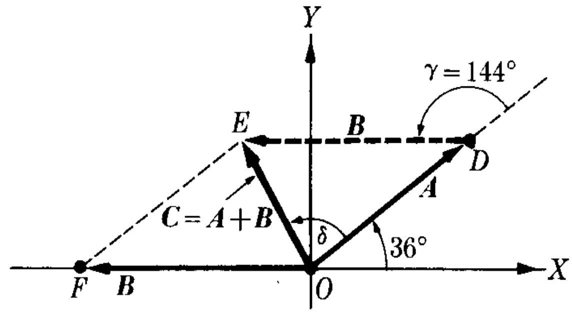


Figura 3-13

Para encontrar el ángulo entre $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{A}$, aplicamos la ec. (3.4), que en este caso es

$$\frac{C}{\operatorname{sen}\gamma}=\frac{B}{\operatorname{sen}\delta}$$

de tal modo que

$$\operatorname{sen}\delta=\frac{B\operatorname{sen}144^\circ}{C}=0{,}996 \text{ y } \delta\cong 85^\circ.$$

Por consiguiente $\boldsymbol{C}$ es $= 4{,}128$ unidades y tiene una dirección que hace un ángulo de $36^\circ + 85^\circ = +121^\circ$ con el eje positivo X.

(b) Para encontrar la diferencia entre dos vectores, debemos saber, justamente como en la aritmética ordinaria, qué cantidad debe ser substraída de otra. Esto es, si el vector $\boldsymbol{D}$ está definido como $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ (Fig. 3-14), entonces $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$ es igual a $-\boldsymbol{D}$.

En esa forma, usando los enunciados de equivalencia de la parte (a) arriba, y de la ec. (3.6), encontramos la magnitud $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ en la forma

$$\boldsymbol{D}=\sqrt{36+49-2(6)(7)\cos 144^\circ}=12{,}31 \text{ unidades.}$$

Para encontrar la dirección de $\boldsymbol{D}$, usamos la ec. (3.4):

$$\frac{D}{\operatorname{sen}36^\circ}=\frac{|-\boldsymbol{B}|}{\operatorname{sen}\alpha};$$

o, desde que $|-\boldsymbol{B}| = B$,

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{B\operatorname{sen}36^\circ}{D}=0{,}334$$

ó $$\alpha = 19{,}5^\circ$$

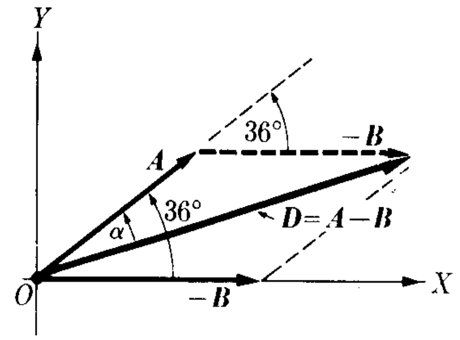


Figura 3-14

y así resulta que $\boldsymbol{D}$ tiene 12,31 unidades de largo y hace un ángulo de $36^\circ - 19{,}5^\circ = 16{,}5^\circ$ con el eje positivo X.

Se deja como ejercicio para el estudiante demostrar que $-\boldsymbol{D} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$ tiene 12,31 unidades de largo y hace un ángulo de $+196{,}5^\circ$ con el eje positivo X.

3.5 *Componentes de un vector*

Cualquier vector $\boldsymbol{V}$ puede siempre considerarse como la suma de dos (o más) vectores, siendo el número de posibilidades infinito. A cualquier conjunto de vectores que al sumarse den $\boldsymbol{V}$ se les llama las *componentes* de $\boldsymbol{V}$.

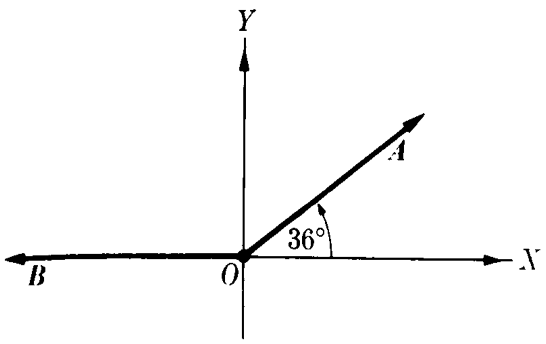


Figura 3-12

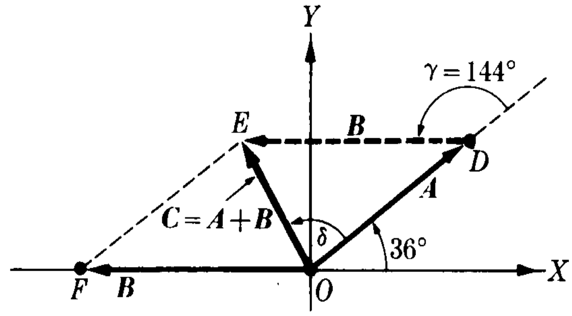


Figura 3-13

Para encontrar el ángulo entre $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{A}$, aplicamos la ec. (3.4), que en este caso es

$$\frac{C}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{B}{\operatorname{sen}\delta}$$

de tal modo que

$$\operatorname{sen}\delta = \frac{B\operatorname{sen}144^\circ}{C} = 0{,}996 \text{ y } \delta \cong 85^\circ.$$

Por consiguiente $\boldsymbol{C}$ es $= 4{,}128$ unidades y tiene una dirección que hace un ángulo de $36^\circ + 85^\circ = +121^\circ$ con el eje positivo X.

(b) Para encontrar la diferencia entre dos vectores, debemos saber, justamente como en la aritmética ordinaria, qué cantidad debe ser substraída de otra. Esto es, si el vector $\boldsymbol{D}$ está definido como $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ (Fig. 3-14), entonces $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$ es igual a $-\boldsymbol{D}$.
En esa forma, usando los enunciados de equivalencia de la parte (a) arriba, y de la ec. (3.6), encontramos la magnitud $D = A - B$ en la forma

$$D = \sqrt{36 + 49 - 2(6)(7)\cos 144^\circ} = 12{,}31 \text{ unidades.}$$

Para encontrar la dirección de $\boldsymbol{D}$, usamos la ec. (3.4):

$$\frac{D}{\operatorname{sen}36^\circ} = \frac{|-\boldsymbol{B}|}{\operatorname{sen}\alpha};$$

o, desde que $|-\boldsymbol{B}| = B$,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{B\operatorname{sen}36^\circ}{D} = 0{,}334$$

ó $\alpha = 19{,}5^\circ$

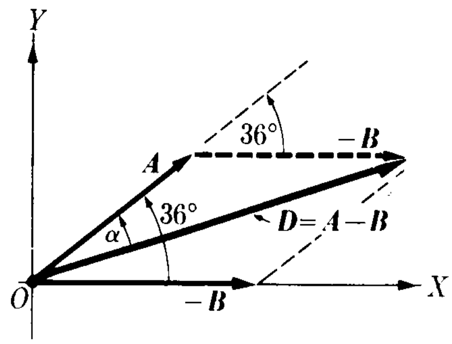


Figura 3-14

y así resulta que $\boldsymbol{D}$ tiene 12,31 unidades de largo y hace un ángulo de $36^\circ - 19{,}5^\circ = 16{,}5^\circ$ con el eje positivo X.

Se deja como ejercicio para el estudiante demostrar que $-\boldsymbol{D} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$ tiene 12,31 unidades de largo y hace un ángulo de $+196{,}5^\circ$ con el eje positivo X.

3.5 *Componentes de un vector*

Cualquier vector $\boldsymbol{V}$ puede siempre considerarse como la suma de dos (o más) vectores, siendo el número de posibilidades infinito. A cualquier conjunto de vectores que al sumarse den $\boldsymbol{V}$ se les llama las *componentes* de $\boldsymbol{V}$.

Las componentes más comúnmente usadas son las *rectangulares;* esto es, el vector se expresa como la suma de dos vectores mutuamente perpendiculares (Fig. 3-15). Entonces, como vemos en la figura, $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_x + \boldsymbol{V}_y$, con

$$V_x = V \cos \alpha \quad \text{y} \quad V_y = V \operatorname{sen} \alpha. \tag{3.7}$$

Definiendo los vectores $\boldsymbol{u}_x$ y $\boldsymbol{u}_y$ en las direcciones de los ejes X e Y respectivamente notamos que

$$\boldsymbol{V}_x = \overrightarrow{OA} = \boldsymbol{u}_x V_x, \qquad \boldsymbol{V}_y = \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{u}_y V_y.$$

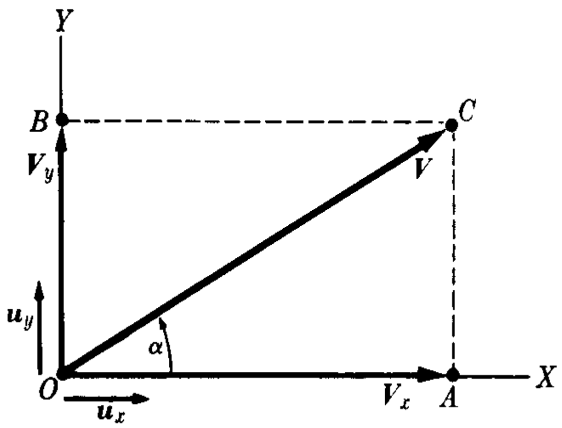


Fig. 3-15. Componentes rectangulares de un vector en un plano.

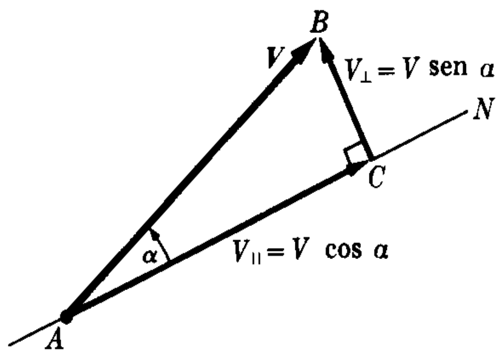


Fig. 3-16. Componentes de un vector en una dirección determinada.

Por consiguiente tenemos

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{u}_x V_x + \boldsymbol{u}_y V_y. \tag{3.8}$$

Esta ecuación expresa un vector en función de sus componentes rectangulares en dos dimensiones. Usando la ecuación (3.7), podemos también escribir en vez de la ecuación (3.8) $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{u}_x V \cos \alpha + \boldsymbol{u}_y V \operatorname{sen} \alpha = V(\boldsymbol{u}_x \cos \alpha + \boldsymbol{u}_y \operatorname{sen} \alpha)$. Al comparar este resultado con la ecuación (3.1), o simplemente al hacer $V = 1$, llegamos a la conclusión que un vector unitario puede escribirse como

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_x \cos \alpha + \boldsymbol{u}_y \operatorname{sen} \alpha. \tag{3.9}$$

Notemos que las componentes de un vector en una dirección particular son iguales a la proyección del vector en aquella dirección (Fig. 3-16). Por la figura, vemos que $V_{\parallel} = V \cos \alpha$. También de la Fig. 3-16, vemos que BC es la componente de $\boldsymbol{V}$ perpendicular a la dirección AN, y podemos comprobar también que $V_\perp = BC = V \operatorname{sen} \alpha$. Así

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_{\parallel} + \boldsymbol{V}_\perp.$$

Hay tres componentes rectangulares en el espacio: V_x, V_y, V_z (Fig. 3-17). El estudiante puede verificar en la figura que se calculan de acuerdo a

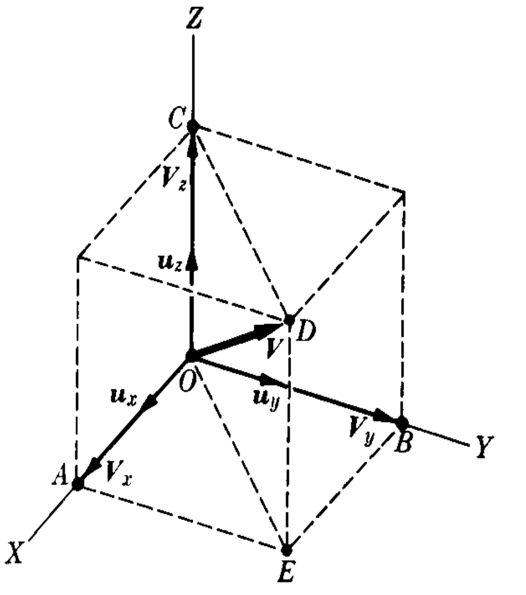


Fig. 3-17. Componentes rectangulares de un vector en tres dimensiones.

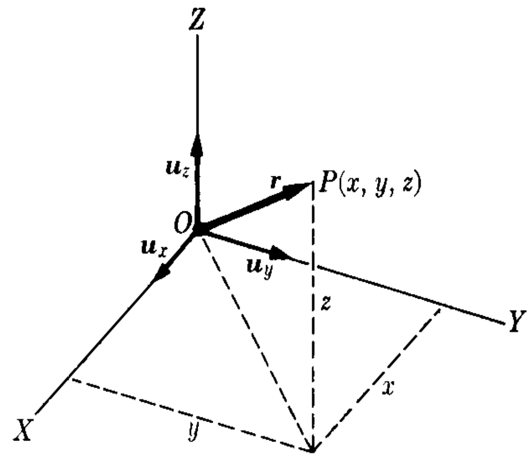


Fig. 3-18. El vector posición.

$$
\begin{aligned}
V_x &= V \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \\
V_y &= V \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \\
V_z &= V \cos \theta,
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

por tanto, por cálculo directo, tenemos que

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2. \tag{3.11}$$

Definiendo tres vectores unitarios $\boldsymbol{u}_x$, $\boldsymbol{u}_y$, $\boldsymbol{u}_z$ paralelos a los ejes X-, Y-, Z, respectivamente, tenemos

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{u}_x V_x + \boldsymbol{u}_y V_y + \boldsymbol{u}_z V_z. \tag{3.12}$$

Nótese que si designamos con α y β los ángulos que el vector $\boldsymbol{V}$ hace con los ejes X- e Y, respectivamente, también tenemos, por similitud con la tercera de las ecuaciones (3.10),

$$V_x = V \cos \alpha, \qquad V_y = V \cos \beta.$$

Reemplazando estas dos relaciones y $V_z = V \cos \theta$ en la ecuación (3.11), obtenemos la relación

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \theta = 1.$$

Las cantidades $\cos \alpha$, $\cos \beta$, y $\cos \theta$ se llaman los *cosenos directores* de un vector.

Un ejemplo importante de un vector tridimensional es el *vector posición* $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP}$ de un punto P con coordenadas (x, y, z). En la Fig. 3-18 vemos que

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = \boldsymbol{u}_x x + \boldsymbol{u}_y y + \boldsymbol{u}_z z. \tag{3.13}$$

El vector posición relativo de dos puntos P_1 y P_2 es $\boldsymbol{r}_{21} = \overrightarrow{P_1P_2}$ (Fig. 3-19). En la figura notamos que $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2}$, de modo que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{21} &= \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \\ &= \boldsymbol{u}_x(x_2 - x_1) + \boldsymbol{u}_y(y_2 - y_1) + \boldsymbol{u}_z(z_2 - z_1). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Notamos que $\overrightarrow{P_2P_1} = \overrightarrow{P_1P_2}$. Debería observarse que, al aplicar la ecuación (3.11) a la ecuación (3.14), obtenemos la expresión de la geometría analítica para la distancia entre dos puntos:

$$r_{21} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

EJEMPLO 3.2. Encontrar la distancia entre los puntos (6, 8, 10) y (— 4, 4, 10).

Solución: Tracemos un sistema de ejes rectangulares e identifiquemos los dos puntos (Fig. 3-20). Vemos que ambos puntos están en un plano paralelo al plano XY, puesto que ambos están a una distancia (altura) de 10 unidades medidas según la dirección Z. Por la ec. (3.14), encontramos que el vector $\boldsymbol{r}_{21}$ es

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{21} &= \boldsymbol{u}_x(-4 - 6) + \boldsymbol{u}_y(4 - 8) + \boldsymbol{u}_z(10 - 10) \\ &= \boldsymbol{u}_x(-10) + \boldsymbol{u}_y(-4) + \boldsymbol{u}_z(0) = -\boldsymbol{u}_x(10) - \boldsymbol{u}_y(4). \end{aligned}$$

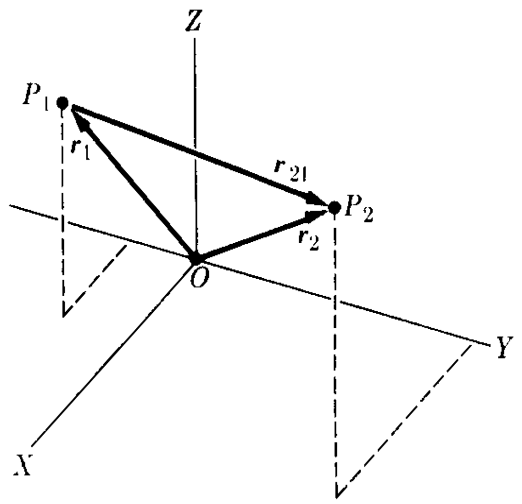


Figura 3-19

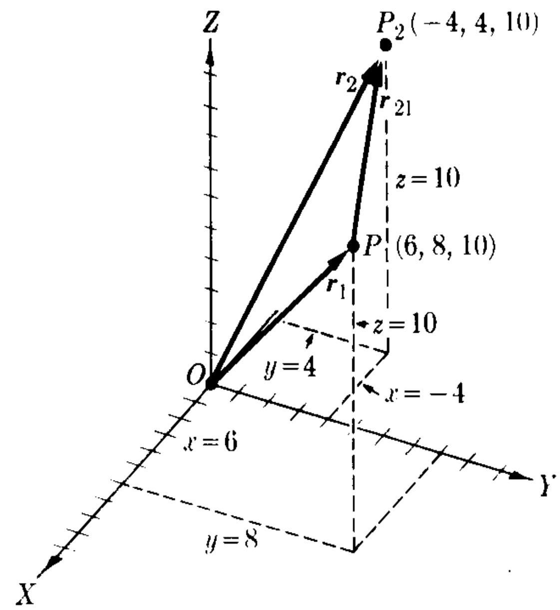


Figura 3-20

Usando la ec. (3.11), encontramos que la magnitud es

$$r_{21}^2 = 100 + 16 = 116 \quad \text{ó} \quad r_{21} = 10{,}77 \text{ unidades.}$$

EJEMPLO 3.3. Hallar las componentes del vector de 13 unidades de largo que forma un ángulo θ de 22,6° con el eje Z, y cuya proyección en el plano XY forma un ángulo ϕ de 37° con el eje $+X$ (cf. Fig. 3-17). Encontrar también los ángulos con los ejes X e Y.

Solución: Usando la Fig. 3-17 para este problema, decimos que

$$V = 13 \text{ unidades}, \quad \theta = 22{,}6°, \quad \cos\theta = 0{,}923,$$
$$\operatorname{sen}\theta = 0{,}384, \quad \phi = 37°, \quad \cos\phi = 0{,}800, \quad \operatorname{sen}\phi = 0{,}600.$$

Una simple aplicación de la ecuación (3.10) da

$$V_x = 13(0{,}384)\,(0{,}800) = 4{,}0 \text{ unidades},$$
$$V_y = 13(0{,}384)\,(0{,}600) = 3{,}0 \text{ unidades},$$
$$V_z = 13(0{,}923) = 12{,}0 \text{ unidades}.$$

En términos de la ec. (3.12) podemos escribir:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{u}_x(4) + \boldsymbol{u}_y(3) + \boldsymbol{u}_z(12)$$

Para los ángulos α y β que $\boldsymbol{V}$ forma con los ejes X e Y, tenemos

$$\cos\alpha = \frac{V_x}{V} = 0{,}308 \text{ ó } \alpha = 72{,}1°$$

$$\cos\beta = \frac{V_y}{V} = 0{,}231 \text{ ó } \beta = 77°.$$

EJEMPLO 3.4. Expresar la ecuación de una línea recta paralela al vector $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{u}_x A + \boldsymbol{u}_y B + \boldsymbol{u}_z C$ y que pasa por el punto P_0.

Solución: Designando por $\boldsymbol{r}_0$ el vector posición de P_0 (Fig. 3.21) y por $\boldsymbol{r}$ el vector posición de cualquier punto P en la recta, tenemos a partir de la ec. (3.14) que $\overrightarrow{P_0P} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$. Pero el vector $\overrightarrow{P_0P}$ debe ser paralelo a $\boldsymbol{V}$, y por consiguiente debemos escribir $\overrightarrow{P_0P} = \lambda\boldsymbol{V}$, donde λ es un parámetro aún indeterminado. Entonces

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = \lambda\boldsymbol{V}$$

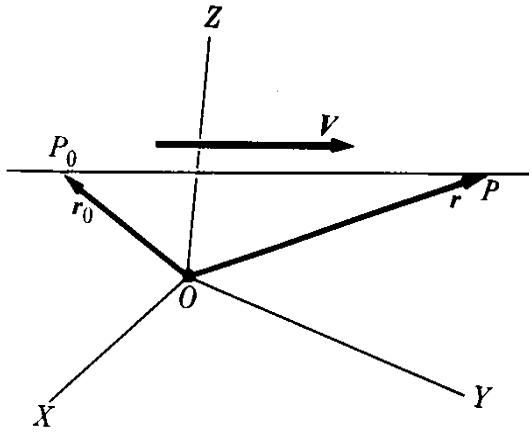


Figura 3-21

es la ecuación de la línea recta, al variar λ, obtenemos los diferentes vectores de posición r. Separando la ecuación en sus componentes rectangulares, tenemos

$$x - x_0 = \lambda A, \qquad y - y_0 = \lambda B, \qquad z_0 - z = \lambda C,$$

ó

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C},$$

que es una de las formas usadas en la geometría analítica para expresar una línea recta.

3.6 *Adición de varios vectores*

Para sumar varios vectores $\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3, \ldots$, extendemos el procedimiento indicado en la Fig. 3-8 para el caso de dos vectores. El método para tres vectores se muestra en la Fig. 3-22. Esto es, dibujamos un vector después de otro, indicando la suma del vector por la línea que va del origen del primero al extremo del último. Entonces

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2 + \boldsymbol{V}_3 + \cdots. \tag{3.15}$$

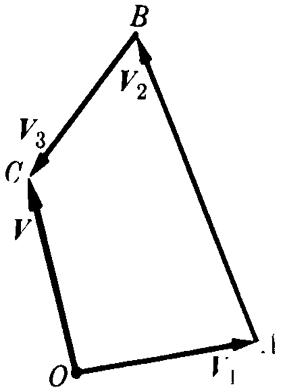


Fig. 3-22. Suma de varios vectores.

No existe una fórmula sencilla para expresar $\boldsymbol{V}$ en términos de $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$, $\boldsymbol{V}_3$, ..., y es mejor utilizar el método de componentes. Consideremos, por simplicidad, el caso en que todos los vectores están en un plano, de tal modo que solamente tenemos que usar dos componentes. Entonces

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V} &= (\boldsymbol{u}_x V_{1x} + \boldsymbol{u}_y V_{1y}) + (\boldsymbol{u}_x V_{2x} + \boldsymbol{u}_y V_{2y}) \\ &\quad + (\boldsymbol{u}_x V_{3x} + \boldsymbol{u}_y V_{3y}) + \ldots \\ &= \boldsymbol{u}_x(V_{1x} + V_{2x} + V_{3x} + \ldots) \\ &\quad + \boldsymbol{u}_y(V_{1y} + V_{2y} + V_{3y} + \ldots).\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned}V_x &= V_{1x} + V_{2x} + V_{3x} + \ldots = \Sigma_i V_{ix} = \Sigma_i V_i \cos \alpha_i, \\ V_y &= V_{1y} + V_{2y} + V_{3y} + \ldots = \Sigma_i V_{iy} = \Sigma_i V_i \operatorname{sen} \alpha_i,\end{aligned} \tag{3.16}$$

donde α_i es el ángulo que $\boldsymbol{V}_i$ hace con el semieje positivo X y $V_i \cos \alpha_i$ y $V_i \operatorname{sen} \alpha_i$ son los componentes de $\boldsymbol{V}_i$ a lo largo de los ejes X e Y. Una vez que conocemos V_x y V_y, calculamos $\boldsymbol{V}$, usando la ec. (3.5). Ilustramos ahora el procedimiento con un ejemplo numérico.

EJEMPLO 3.5. Hallar el resultado de la suma de los siguientes vectores:

$$\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{u}_x(4) + \boldsymbol{u}_y(-3) \text{ unidades}, \qquad \boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{u}_x(-3) + \boldsymbol{u}_y(2) \text{ unidades},$$
$$\boldsymbol{V}_3 = \boldsymbol{u}_x(2) + \boldsymbol{u}_y(-6) \text{ unidades}, \qquad \boldsymbol{V}_4 = \boldsymbol{u}_x(7) + \boldsymbol{u}_y(-8) \text{ unidades},$$

y

$$\boldsymbol{V}_5 = \boldsymbol{u}_x(9) + \boldsymbol{u}_y(1) \text{ unidades}.$$

Solución: Aplicando la ecuación (3.16), tenemos

$$V_x = 4 - 3 + 2 + 7 + 9 = 19 \text{ unidades},$$
$$V_y = -3 + 2 - 6 - 8 + 1 = -14 \text{ unidades},$$

ó

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{u}_x(19) - \boldsymbol{u}_y(14) \text{ unidades}.$$

La magnitud de $\boldsymbol{V}$ es $V = \sqrt{(19)^2 + (-14)^2} = 23{,}55$ unidades. Su dirección se halla a partir de $\operatorname{tg} \alpha = V_y/V_x = -0{,}738$ ó $\alpha = -36{,}4°$, que es el ángulo que $\boldsymbol{V}$ hace con el eje X.

3.7 Aplicación a problemas de cinemática

Como una ilustración de cómo trabajar con los vectores en situaciones físicas sencillas, consideremos ahora algunos problemas de cinemática. La única suposición física que necesitamos es el reconocimiento de que la velocidad es una cantidad vectorial.

Supongamos, por ejemplo, que tenemos un bote moviéndose con una velocidad $\boldsymbol{V}_B$ relativa al agua. Si el agua está quieta $\boldsymbol{V}_B$ es también la velocidad del bote medida con relación a un observador en la orilla. Pero si el agua fluye a una cierta velocidad, ello introduce un factor de arrastre que afecta a la velocidad del bote. Así la velocidad resultante del bote, medida por un observador en la orilla, es la suma vectorial de la velocidad del bote $\boldsymbol{V}_B$ relativa al agua y la velocidad de arrastre $\boldsymbol{V}_C$ debida a la corriente del agua. Esto es, $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_B + \boldsymbol{V}_C$. Un razonamiento similar se aplica a los objetos que se mueven en el aire, tales como los aeroplanos.

EJEMPLO 3.6. Un bote a motor se dirige hacia el norte a 15 millas por hora en un lugar donde la corriente es de 5 millas por hora en la dirección S 70° E. Encontrar la velocidad resultante del bote.

Solución: Este problema se ha representado gráficamente en la Fig. 3-23, donde $\boldsymbol{V}_B$ es la velocidad del bote, $\boldsymbol{V}_C$ la velocidad de la corriente o arrastre, y $\boldsymbol{V}$ es la velocidad resultante obtenida de

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_B + \boldsymbol{V}_C.$$

Esta relación se basa en el hecho físico de que la velocidad resultante es la suma vectorial de la velocidad del bote relativa al agua más la velocidad de arrastre $\boldsymbol{V}_C$ debida a la corriente.

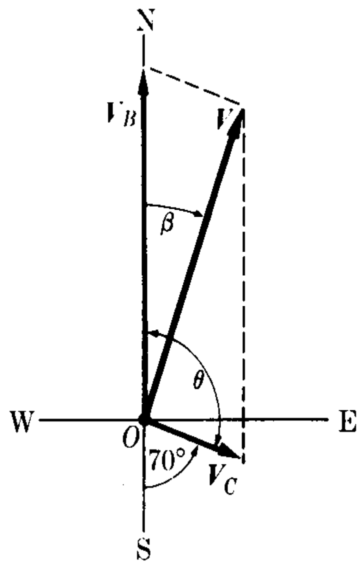


Figura 3-23

Analíticamente, como $\theta = 110°$, tenemos

$$V = \sqrt{15^2 + 5^2 + 2(15)(5)\cos 110°} = 14{,}1 \text{ mi hr}^{-1},$$

lo que da la magnitud de la velocidad resultante. Para obtener la dirección, aplicamos la ec. (3.4),

$$\frac{V}{\text{sen}\,\theta} = \frac{V_C}{\text{sen}\,\beta} \quad \text{ó} \quad \text{sen}\,\beta = \frac{V_C\,\text{sen}\,\theta}{V} = 0{,}332$$

obteniendo $\beta = 19{,}4°$. De este modo se ve que el movimiento resultante es en la dirección N 19,4° E.

EJEMPLO 3.7. Un bote a motor se dirige en la dirección N 30° E a 25 millas por hora en un lugar donde la corriente es tal que el movimiento resultante es de 30 millas por hora en la dirección N 50° E. Encontrar la velocidad de la corriente.

Solución: Designando otra vez la velocidad del bote por $\boldsymbol{V}_B$, la velocidad de la corriente por $\boldsymbol{V}_C$, y la velocidad resultante por $\boldsymbol{V}$, tenemos $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_B + \boldsymbol{V}_C$, de modo que $\boldsymbol{V}_C = \boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}_B$. Los vectores $\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{V}_B$ han sido dibujados en la Fig. 3-24, así como la diferencia de ellos, lo que da $\boldsymbol{V}_C$. Para calcular V_C, notamos que el ángulo entre $\boldsymbol{V}$ y $-\boldsymbol{V}_B$ es de 160°. Así

$$V_C = \sqrt{30^2 + 25^2 + 2(30)(25)\cos 160°} = 10{,}8 \text{ mi hr}^{-1}.$$

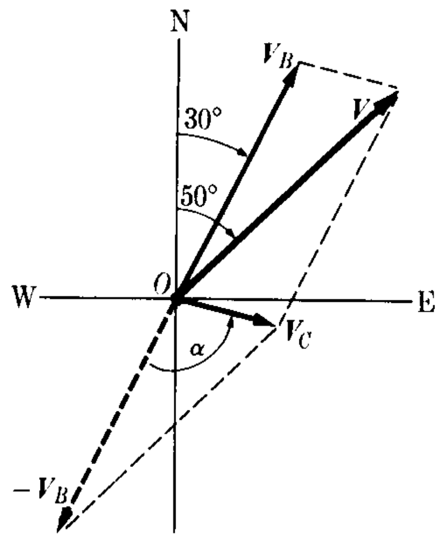


Figura 3-24

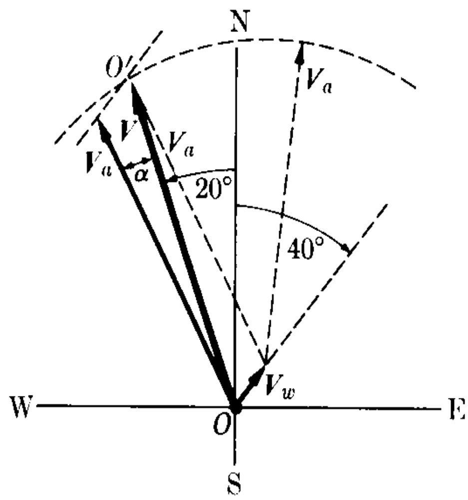


Figura 3-25

Para obtener la dirección de V_C, obtenemos primero el ángulo α entre V y $-V_B$, usando la ecuación (3.4),

$$\frac{V}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{V_C}{\operatorname{sen}160°} \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen}\alpha \frac{V \operatorname{sen}160°}{V_C} = 0{,}951$$

obteniendo $\alpha = 72°$. Por consiguiente el ángulo con el eje SN es $72° - 30° = 42°$, y la dirección de V_C es S 42° E.

EJEMPLO 3.8. La velocidad de un aeroplano en aire tranquilo es de 200 millas por hora. Se desea ir de O a O', siendo la dirección de OO' N 20° W. El viento tiene una velocidad de 30 millas por hora en la dirección N 40° E. Encontrar la dirección del movimiento del avión y su velocidad resultante.

Solución: Designemos la velocidad del aeroplano por V_a y la del viento por V_w. La velocidad resultante es, como antes,

$$V = V_a + V_w.$$

En este caso sabemos que V debe de tener la dirección OO'. Por lo tanto el vector V_a debe dibujarse de tal modo que cuando se sume a V_w, la resultante esté a lo largo de OO'. Esto se ha hecho en la Fig. 3-25 dibujando un círculo de radio V_a, con el centro en el extremo de V_w, y hallando la intersección de este círculo con la línea OO'.

Para proceder analíticamente, notamos que el ángulo entre V y V_w es $20° + 40° = 60°$. Por tanto, usando la ec. (3.4), obtenemos

$$\frac{V_a}{\operatorname{sen}60°} = \frac{V_w}{\operatorname{sen}\alpha} \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{V_w \operatorname{sen}60°}{V_a} = 0{,}130$$

lo que da $\alpha = 7{,}8°$. Por consiguiente, la dirección de V_a debe ser N 27,8° W. El ángulo entre V_a y V_w es $\theta = 27{,}8° + 40° = 67{,}8°$, y la magnitud de la velocidad resultante, usando la ec. (3.3), es

$$V = \sqrt{200^2 + 30^2 + 2 \times 200 \times 30 \cos 67{,}8°} = 204 \text{ mi hr}^{-1}.$$

¿Es posible que este problema tenga dos soluciones, o ninguna? Dejamos la respuesta al estudiante.

EJEMPLO 3.9. Hallar la aceleración de un cuerpo que se desliza a lo largo de un plano inclinado en un ángulo de θ.

Solución: Sea P (Fig. 3-26) el cuerpo que se desliza a lo largo del plano AB sin fricción. El plano AB está inclinado en un ángulo θ. Si el plano no estuviera presente el cuerpo caería libremente a lo largo de la vertical con la aceleración debida a la gravedad $g = 9{,}8\ \mathrm{m\ s^{-2}}$ (ver ejemplo 5.2). Las componentes de g paralela y perpendicular al plano (llamadas, respectivamente, a y a') están dados por $a = g$ sen θ y $a' = g \cos \theta$.

La componente a da la aceleración del cuerpo a lo largo del plano.

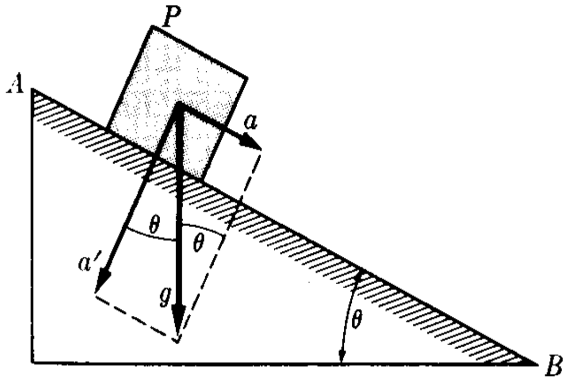


Fig. 3-26. Aceleración a lo largo de un plano inclinado.

3.8 Producto escalar

Es posible definir otras operaciones con vectores además de la suma. Una de estas operaciones es el producto escalar; otra es el producto vectorial.

El *producto escalar* de dos vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, representado por el símbolo $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ (leer "A multiplicado escalarmente por B"), se define como la cantidad escalar obtenida hallando el producto de las magnitudes de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ con el coseno del ángulo entre los dos vectores,

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = AB\cos\theta. \tag{3.17}$$

Obviamente $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = A^2$, ya que el ángulo en este caso es cero. Si los dos vectores son perpendiculares ($\theta = \pi/2$), el producto escalar es cero. La condición de perpendicularidad se expresa por $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 0$. El producto escalar es conmutativo; esto es, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$, ya que el coseno de θ es el mismo en ambos casos. El producto escalar es distributivo con respecto a la suma; esto es

$$\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}. \tag{3.18}$$

Para probar la propiedad distributiva, notamos en la Fig. 3-27 que

$$\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = |\boldsymbol{C}|\,|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\cos\gamma = C(Ob),$$

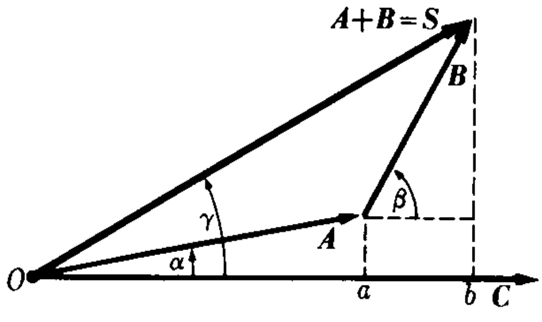


Fig. 3-27. El producto escalar es distributivo.

ya que $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}|\cos\gamma = Ob$. Análogamente, $\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A} = CA\cos\alpha = C(Oa)$ y $\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B} = CB\cos\beta = C(ab)$. Sumando, obtenemos

$$\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B} = C(Oa + ab) = C(Ob).$$

Por consiguiente hemos probado la ecuación (3.18). Los productos escalares entre los vectores unitarios $\boldsymbol{u}_x$, $\boldsymbol{u}_y$, y $\boldsymbol{u}_z$ son

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_x\cdot\boldsymbol{u}_x &= \boldsymbol{u}_y\cdot\boldsymbol{u}_y = \boldsymbol{u}_z\cdot\boldsymbol{u}_z = 1, \\ \boldsymbol{u}_x\cdot\boldsymbol{u}_y &= \boldsymbol{u}_y\cdot\boldsymbol{u}_z = \boldsymbol{u}_z\cdot\boldsymbol{u}_x = 0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Escribiendo $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ en función de sus componentes rectangulares de acuerdo con la ecuación (3.12), y aplicando la ley distributiva (3.18), tenemos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} &= (\boldsymbol{u}_xA_x + \boldsymbol{u}_yA_y + \boldsymbol{u}_zA_z)\cdot(\boldsymbol{u}_xB_x + \boldsymbol{u}_yB_y + \boldsymbol{u}_zB_z) \\ &= (\boldsymbol{u}_x\cdot\boldsymbol{u}_x)A_xB_x + (\boldsymbol{u}_x\cdot\boldsymbol{u}_y)A_xB_y + (\boldsymbol{u}_x\cdot\boldsymbol{u}_z)A_xB_z \\ &\quad + (\boldsymbol{u}_y\cdot\boldsymbol{u}_x)A_yB_x + (\boldsymbol{u}_y\cdot\boldsymbol{u}_y)A_yB_y + (\boldsymbol{u}_y\cdot\boldsymbol{u}_z)A_yB_z \\ &\quad + (\boldsymbol{u}_z\cdot\boldsymbol{u}_x)A_zB_x + (\boldsymbol{u}_z\cdot\boldsymbol{u}_y)A_zB_y + (\boldsymbol{u}_z\cdot\boldsymbol{u}_z)A_zB_z. \end{aligned}$$

Aplicando las relaciones (3.19), obtenemos finalmente

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z, \tag{3.20}$$

resultado que tiene muchas aplicaciones. Notemos que

$$A^2 = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2,$$

lo que está de acuerdo con la ecuación (3.11).

Podemos aplicar las propiedades del producto escalar para derivar de manera sencilla la fórmula (3.3) para la suma de dos vectores. De $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2$, tenemos

$$\begin{aligned} V^2 &= (\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2)\cdot(\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2) = V_1^2 + V_2^2 + 2\boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{V}_2 \\ &= V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos\theta. \end{aligned}$$

Este resultado se puede extender sin dificultar a cualquier número de vectores. Supongamos que $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2 + \cdots = \Sigma_i\boldsymbol{V}_i$. Entonces

$$\begin{aligned} V^2 &= (\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2 + \boldsymbol{V}_3 + \cdots)^2 \\ &= V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + \cdots + 2\boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{V}_2 + 2\boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{V}_3 \\ &\quad + \ldots + 2\boldsymbol{V}_2\cdot\boldsymbol{V}_3 + \cdots, \end{aligned}$$

o, en una notación compacta,

$$V^2 = \sum_{\substack{\text{todos los}\\ \text{vectores}}} V_i^2 + 2\sum_{\substack{\text{todos los}\\ \text{pares}}} \boldsymbol{V}_i\cdot\boldsymbol{V}_j.$$

EJEMPLO 3.10. Encontrar el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{u}_x + 3\boldsymbol{u}_y - \boldsymbol{u}_z$ y $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{u}_x + \boldsymbol{u}_y + 2\boldsymbol{u}_z$.

Solución: Calculamos primero su producto escalar, usando la ecuación (3.20):

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 2(-1) + 3(1) + (-1)2 = -1.$$

También

$$A = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14} = 3{,}74 \text{ unidades}$$

y

$$B = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6} = 2{,}45 \text{ unidades.}$$

Por consiguiente de la ec. (3.17), tenemos

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{AB} = -\frac{1}{9{,}17} = -0{,}109,$$

lo que corresponde a $\theta = 96{,}3°$.

EJEMPLO 3.11. Expresar la ecuación de un plano perpendicular al vector $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{u}_x A + \boldsymbol{u}_y B + \boldsymbol{u}_z C$ y que pasa por el punto P_0.

Solución: Designando el vector posición de P_0 por $\boldsymbol{r}_0$ (Fig. 3-28), y el vector posición de cualquier punto P del plano por $\boldsymbol{r}$, vemos que el vector

$$\overrightarrow{P_0P} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$$

debe ser perpendicular a $\boldsymbol{V}$. Así

$$\boldsymbol{V}\cdot(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0$$

es la ecuación que debe ser satisfecha por los vectores posición $\boldsymbol{r}$ de todos los puntos del plano. Usando la ecuación (3.20), podemos escribir

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

que es la forma en la cual se expresa usualmente la ecuación del plano en geometría analítica.

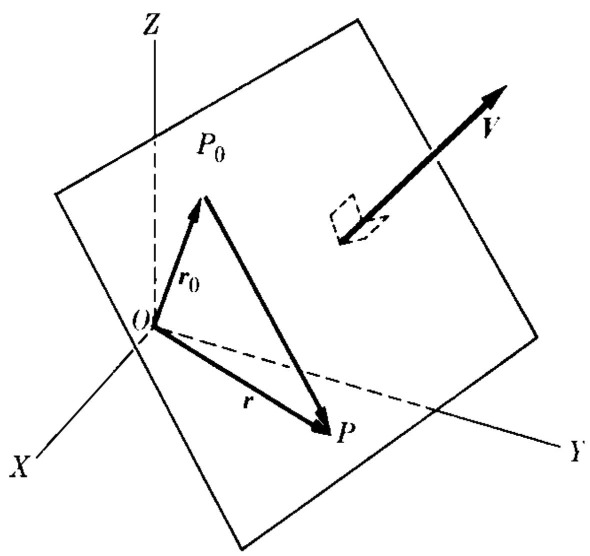


Fig. 3-28. Ecuación vectorial de un plano.

3.9 Producto vectorial

El producto vectorial de dos vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, representado por el símbolo $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ (leer "A multiplicado vectorialmente por B"), se define como el vector perpendicular al plano determinado por $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ en la dirección de avance de un tornillo de rosca derecha que ha sido rotado de $\boldsymbol{A}$ hacia $\boldsymbol{B}$ (Fig. 3-29). Un tornillo de rosca derecha es aquel que, si colocamos nuestra mano derecha como se muestra en la (Fig. 3-29), con los dedos señalando en la dirección de la rotación, el tornillo avanza en la dirección del pulgar. La mayoría de los tornillos ordinarios son de rosca derecha.

La magnitud del producto vectorial $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ está dada por

$$|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = AB \operatorname{sen}\theta. \tag{3.21}$$

Otra regla sencilla útil para establecer la dirección de $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ es la siguiente: Colocar el pulgar, índice y el dedo mayor de la mano derecha en la posición mos-

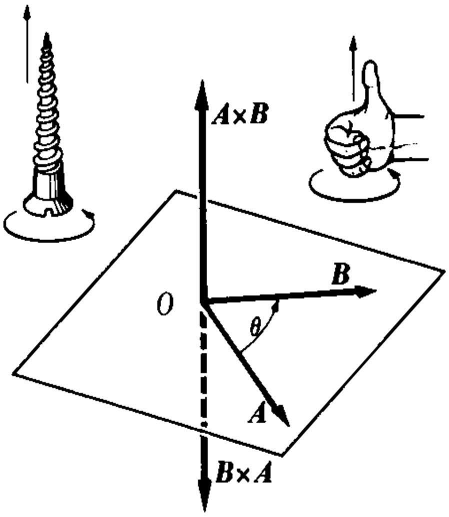


Fig. 3-29. Relaciones vectoriales en el producto vectorial.

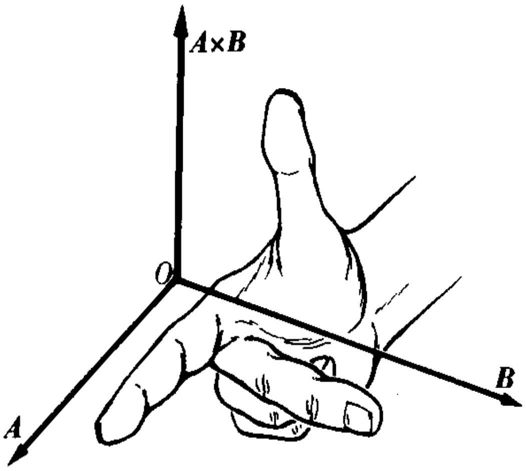
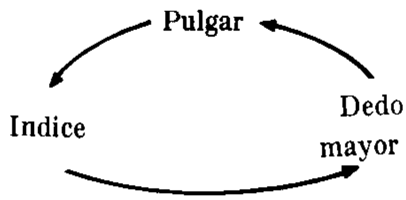


Fig. 3-30. Regla de la mano derecha para el producto vectorial.

trada en la Fig. 3-30. Si el índice y el dedo mayor apuntan en las direcciones de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, respectivamente, el pulgar apunta en la dirección de $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$. En realidad la regla es más general, y los vectores $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, y $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ pueden ser asignados sucesivamente a los dedos empezando por cualquiera de ellos, siempre que se mantenga el siguiente orden *cíclico.*



De la definición del producto vectorial, llegamos a la conclusión que

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}, \tag{3.22}$$

ya que el sentido de rotación del tornillo se invierte cuando el orden de los vectores se cambia, de modo que el producto vectorial es anticonmutativo. Si dos vectores son paralelos, $\theta = 0°$, sen $\theta = 0$, y el producto vectorial es cero. Por consiguiente la condición del paralelismo puede expresarse por $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = 0$. Obviamente $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = 0$.

Nótese que la magnitud del producto vectorial es igual al área del paralelogramo formado por los vectores, o es igual al doble del área del triángulo formado con su resultante. Esto puede verse como sigue (Fig. 3-31). La magnitud de $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ es AB sen θ. Pero B sen $\theta = h$, donde h es la altura del paralelogramo formado con $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ como lados. Así

$$|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = Ah = \text{área del paralelogramo.}$$

El producto vectorial es distributivo con relación a la suma; esto es,

$$\boldsymbol{C} \times (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A} + \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{B}. \tag{3.23}$$

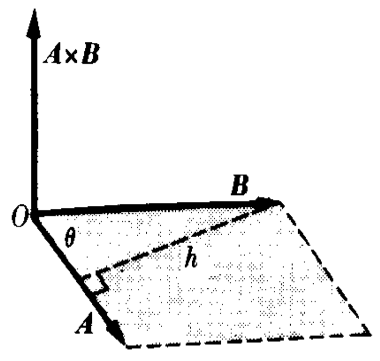


Fig. 3-31. El producto vectorial es equivalente al área del paralelogramo definido por los dos vectores.

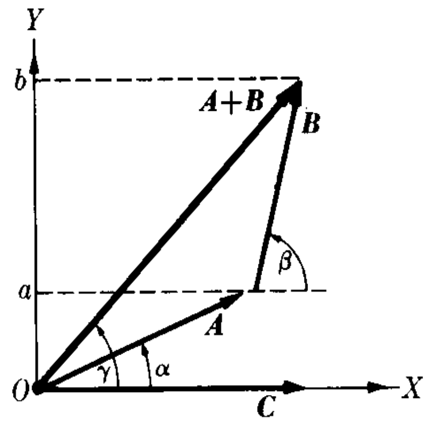


Fig. 3-32. El producto vectorial es distributivo.

La demostración cuando los tres vectores son coplanares es muy simple. En este caso (Fig. 3-32) los tres productos vectoriales que aparecen en la ec. (3.23) son perpendiculares a la página de este libro, y sólo es necesario verificar la ec. (3.23) para estas magnitudes. Sin embargo

$$|\boldsymbol{C} \times (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})| = |\boldsymbol{C}||\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| \operatorname{sen} \gamma = C(Ob).$$

Similarmente,

$$|\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}| = \boldsymbol{CA} \operatorname{sen} \alpha = C(Oa); \qquad |\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{B}| = CB \operatorname{sen} \beta = C(ab).$$

Al sumar, obtenemos

$$|\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{B}| = C(Oa + ab) = C(Ob).$$

Por consiguiente la ec. (3.23) ha sido probada tanto para la magnitud como para la dirección. La prueba en el caso general de tres vectores en el espacio, es análoga, pero algo compleja.*

Los productos vectoriales entre los vectores unitarios, $\boldsymbol{u}_x$, $\boldsymbol{u}_y$, $\boldsymbol{u}_z$ son

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_x \times \boldsymbol{u}_y &= -\boldsymbol{u}_y \times \boldsymbol{u}_x = \boldsymbol{u}_z,\\
\boldsymbol{u}_y \times \boldsymbol{u}_z &= -\boldsymbol{u}_z \times \boldsymbol{u}_y = \boldsymbol{u}_x,\\
\boldsymbol{u}_z \times \boldsymbol{u}_x &= -\boldsymbol{u}_x \times \boldsymbol{u}_z = \boldsymbol{u}_y,\\
\boldsymbol{u}_x \times \boldsymbol{u}_x &= \boldsymbol{u}_y \times \boldsymbol{u}_y = \boldsymbol{u}_z \times \boldsymbol{u}_z = 0.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

* Para una prueba general, ver G. B. Thomas, *Cálculo infinitesimal y geometría analítica*, tercera edición; Madrid: Aguilar, 1964, Sección 13-4.

Escribiendo $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ en función de sus componentes rectangulares, de acuerdo a la ec. (3.12), y aplicando la ley distributiva (3.23), tenemos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} &= (\boldsymbol{u}_xA_x+\boldsymbol{u}_yA_y+\boldsymbol{u}_zA_z)\times(\boldsymbol{u}_xB_x+(\boldsymbol{u}_yB_y+\boldsymbol{u}_zB_z)\\ &= (\boldsymbol{u}_x\times\boldsymbol{u}_x)A_xB_x+(\boldsymbol{u}_x\times\boldsymbol{u}_y)A_xB_y+(\boldsymbol{u}_x\times\boldsymbol{u}_z)A_xB_z\\ &\quad+(\boldsymbol{u}_y\times\boldsymbol{u}_x)A_yB_x+(\boldsymbol{u}_y\times\boldsymbol{u}_y)A_yB_y+(\boldsymbol{u}_y\times\boldsymbol{u}_z)A_yB_z\\ &\quad+(\boldsymbol{u}_z\times\boldsymbol{u}_x)A_zB_x+(\boldsymbol{u}_z\times\boldsymbol{u}_y)A_zB_y+(\boldsymbol{u}_z\times\boldsymbol{u}_z)A_zB_z.\end{aligned}$$

Aplicando las relaciones (3.24), tenemos finalmente

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{u}_x(A_yB_z-A_zB_y)+\boldsymbol{u}_y(A_zB_x-A_xB_z)\\ &\quad+\boldsymbol{u}_z(A_xB_y-A_yB_x).\end{aligned}\tag{3.25}$$

La ec. (3.25) también se puede escribir en la forma más compacta de determinante,

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{u}_x & \boldsymbol{u}_y & \boldsymbol{u}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}.\tag{3.26}$$

Nota sobre los determinantes. Un determinante es una notación conveniente para designar cantidades que han sido combinadas en cierta forma simétrica. Un determinante de segundo orden es un arreglo de 2×2 números evaluados de acuerdo a la regla:

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1.$$

Nótese que lo que hacemos es multiplicar a lo largo de las diagonales y sustraer. Un determinante de tercer orden es un arreglo de 3×3 números evaluados de acuerdo a la regla:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} &= a_1\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}+a_2\begin{vmatrix}b_3 & b_1\\ c_3 & c_1\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\\ &= a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1).\end{aligned}$$

Nótese el orden en que las columnas aparecen en cada término. El estudiante puede verificar que al aplicar esta regla a la ec. (3.26), obtendrá la ecuación (3.25). Para mayor información en determinantes, el estudiante debe consultar G. B. Thomas, *Cálculo infinitesimal y geometría analítica*, tercera edición; Madrid: Aguilar, secciones 8-1 y 8-2.

EJEMPLO 3.12. Hallar el área del paralelogramo determinado por los vectores

$$\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{u}_x+3\boldsymbol{u}_y-\boldsymbol{u}_z \quad \text{y} \quad \boldsymbol{B}=-\boldsymbol{u}_x+\boldsymbol{u}_y+2\boldsymbol{u}_z.$$

Solución: Calculemos primero el producto vectorial de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, usando la ecuación (3.26):

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{u}_x & \boldsymbol{u}_y & \boldsymbol{u}_z\\ 2 & 3 & -1\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix}=7\boldsymbol{u}_x-3\boldsymbol{u}_y+5\boldsymbol{u}_z.$$

Luego el área del paralelogramo es justamente la magnitud de $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, o

$$\text{Area} = |\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = \sqrt{49 + 9 + 25} = 9{,}110 \text{ unidades.}$$

EJEMPLO 3.13. Hallar la distancia del punto P (4, — 1, 5) a la línea recta que pasa por los puntos P_1 (— 1, 2, 0) y P_2 (1, 1, 4).

Solución: La geometría del problema ha sido ilustrada en la Fig. 3-33. Se ve que $d = P_1P$ sen θ. Introducimos los vectores

$$\boldsymbol{A} = \overrightarrow{P_1P} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{B} = \overrightarrow{P_1P_2},$$

de modo que, usando la ec. (3.14), obtenemos

$$\boldsymbol{A} = \overrightarrow{P_1P} = 5\boldsymbol{u}_x - 3\boldsymbol{u}_y + 5\boldsymbol{u}_z,$$

$$\boldsymbol{B} = \overrightarrow{P_1P_2} = 2\boldsymbol{u}_x - \boldsymbol{u}_y + 4\boldsymbol{u}_z.$$

Vemos entonces que

$$d = A \operatorname{sen} \theta = \frac{AB \operatorname{sen} \theta}{B} = \frac{|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}|}{B}.$$

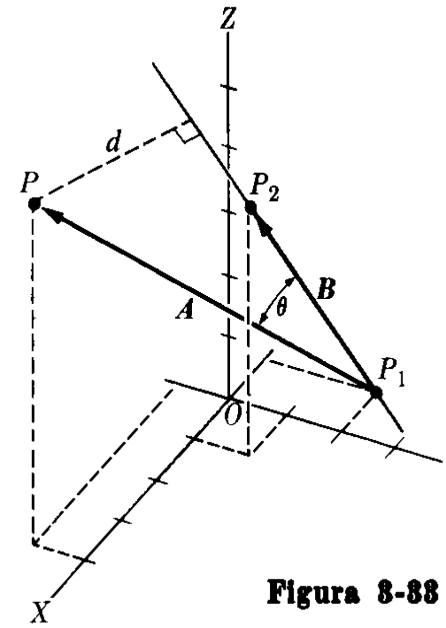


Figura 3-33

De modo que, usando la ec. (3.26) para calcular el producto vectorial de $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, obtenemos

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_x & \boldsymbol{u}_y & \boldsymbol{u}_z \\ 5 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -7\boldsymbol{u}_x - 10\boldsymbol{u}_y + 1\boldsymbol{u}_z.$$

Entonces $|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = \sqrt{49 + 100 + 1} = \sqrt{150} = 12{,}25$, y ya que $B = \sqrt{4 + 1 + 16} = \sqrt{21} = 4{,}582$, obtenemos

$$d = \frac{|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}|}{B} = 2.674.$$

3.10 *Representación vectorial de una superficie*

En la discusión relacionada con la Fig. 3.31, indicamos que el producto vectorial $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ es igual en magnitud al área del paralelogramo cuyos lados están definidos por los vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$. Ello sugiere la posibilidad de asociar un vector con una superficie.

Consideremos la superficie plana S (Fig. 3-34) cuya periferia L está orientada como lo indica la flecha. Adoptaremos la convención de representarla por un vector $\boldsymbol{S}$, cuya magnitud es igual al área de la superficie y cuya dirección es perpendicular a la superficie. El sentido del vector es aquel en el cual avanza un tornillo de rosca derecha cuando su cabeza se gira en el sentido de orientación de la periferia.

Las componentes de $\boldsymbol{S}$ tienen un significado geométrico simple. Supongamos que el plano de la superficie S hace un ángulo θ con el plano XY (Fig. 3-35). La proyección de S en el plano XY es $S \cos \theta$. Pero la normal al plano de la superficie también forma un ángulo θ con el eje Z. Por consiguiente, la componente Z del vector $\boldsymbol{S}$ es $S_z = S \cos \theta$. Luego concluimos que las componentes de $\boldsymbol{S}$ a lo largo de los ejes coordenados son iguales a las proyecciones de la superficie en los tres planos coordenados.

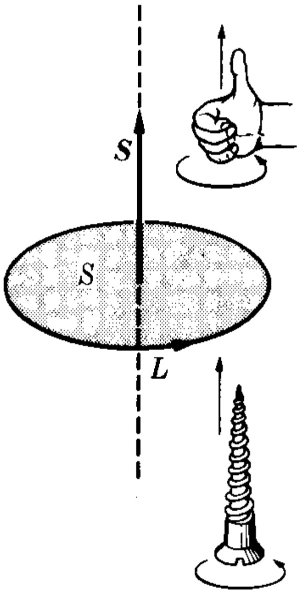


Fig. 3-34. Representación vectorial de una superficie.

Si la superficie *no* es plana siempre puede ser posible dividirla en un número muy grande de pequeñas áreas (figura 3-36) cada una de las cuales es prácticamente plana, y representarla por un vector $\boldsymbol{S}_i$. De ese modo el vector que representa la superficie curva es

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2 + \boldsymbol{S}_3 + \cdots = \Sigma_i \, \boldsymbol{S}_i.$$

En este caso la magnitud de $\boldsymbol{S}$ no es igual al área de la superficie curva, la que es $\Sigma_i S_i$; sin embargo, las magnitudes de sus tres componentes son iguales a las áreas de las proyecciones de la superficie en los tres planos coordenados.

Por ejemplo, consideremos un terreno, que sea en parte horizontal y en parte esté en una ladera de una colina, como se indica en la Fig. 3-37. Si S_1 y S_2 son las áreas de cada parte, el área total del terreno usable para la agricultura es $S_1 + S_2$. Sin embargo, si el terreno debe ser usado para un edificio, lo que realmente es útil es la proyección del terreno en un plano horizontal, esto es $S_1 + S_2 \cos \theta$. El vector $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$ que representa el terreno, tiene una magnitud

$$S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2 \cos \theta},$$

que es más pequeña que $S_1 + S_2$. Pero su componente a lo largo del eje vertical Z es $S_z = S_1 + S_2 \cos \theta$, de acuerdo con la proyección del terreno en el plano horizontal XY.

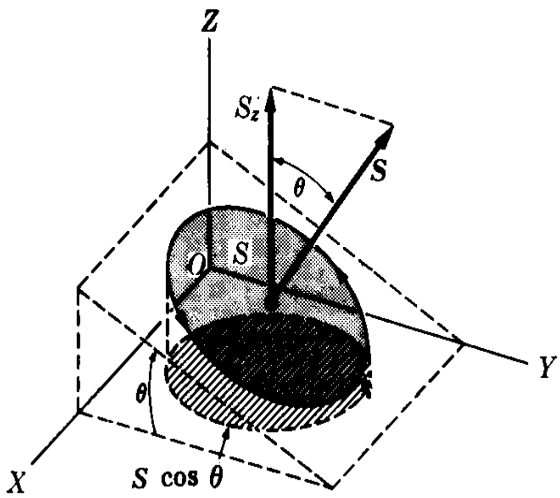


Fig. 3-35. Proyección de una superficie en un plano.

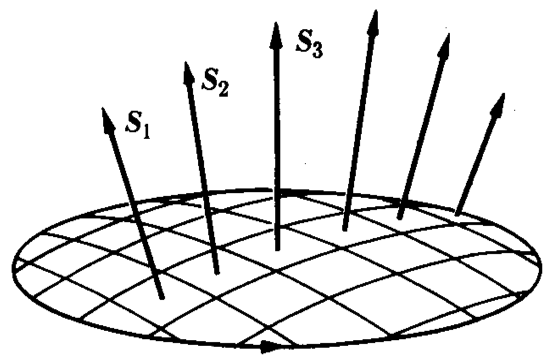


Fig. 3-36. Suma vectorial de superficies.

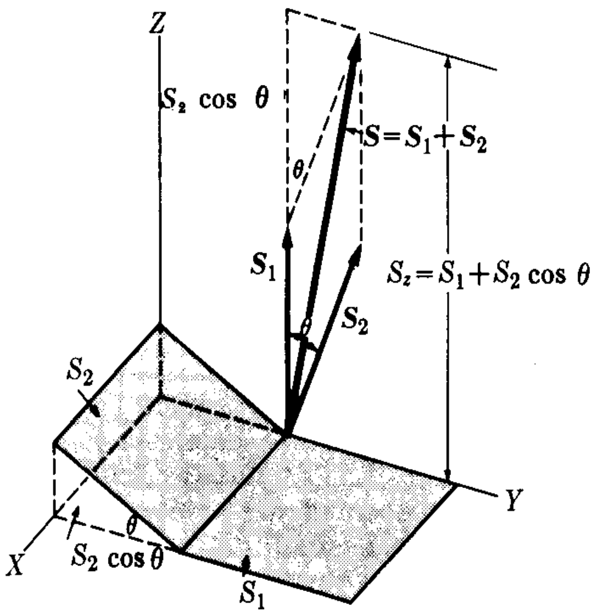


Figura 3-37

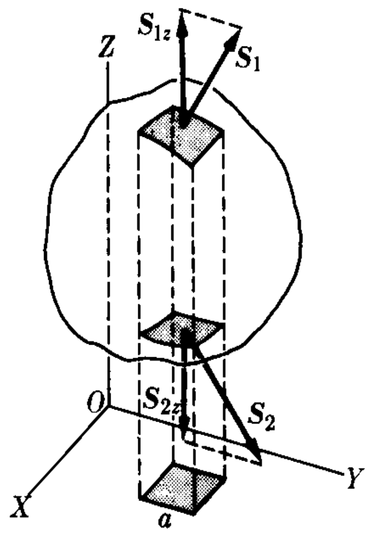


Fig. 3-38. Una superficie cerrada está representada por un vector nulo.

Finalmente, consideremos una *superficie cerrada*, como se muestra en la Fig. 3-38. Dividamos esta superficie en pequeñas superficies planas, cada una de ellas representada por un vector $\boldsymbol{S}_i$ en la dirección exterior. Podemos siempre tomar las pequeñas áreas en pares tales que su proyección sea cero. Por ejemplo, en la Fig. 3-38, las dos áreas S_1 y S_2 tienen la misma proyección en el plano XY, pero con signos opuestos. Por consiguiente, $S_{1z} = a$ y $S_{2z} = -a$. Sumando dichos pares obtenemos $S_z = \Sigma_i S_{iz} = 0$. Con el mismo argumento vemos que este resultado también es válido para las componentes de $\boldsymbol{S} = \Sigma_i \boldsymbol{S}_i$ a lo largo de los otros dos ejes. Por consiguiente, $\boldsymbol{S} = 0$, o lo que es lo mismo, el *vector que representa una superficie cerrada es cero.*

Bibliografía

1. *Vectors, A Programmed Test for Introductory Physics.* New York: Appleton-Century-Crofts, 1962
2. *Elementary Vectors,* por E. Wolstenholme. New York: Pergamon Press, 1964
3. *Mechanics* (segunda edición), por K. Symon. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1964, secs. 3-1 y 3-3
4. *Physical Mechanics* (tercera edición), por R. Lindsay. Princeton, N.J.: Van Nostrand, 1963, sec. 1-3
5. *Vector Mechanics,* por D. Christie. New York: McGraw-Hill, 1964
6. *Introduction to Engineering Mechanics,* por J. Huddleston. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1961, caps. 2 y 7
7. *The Feynman Lectures on Physics,* vol. I, por R. Feynman, R. Leighton y M. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, cap. 11

Problemas

3.1 Dos vectores de 6 y 9 unidades de longitud, forman un ángulo entre ellos de (a) 0°, (b) 60°, (c) 90°, (d) 150° y (e) 180°. Encontrar la magnitud de su resultante y su dirección con respecto al vector más pequeño.

3.2 Encontrar el ángulo entre dos vectores de 10 y 15 unidades de longitud, cuando su resultante tiene (a) 20 unidades de longitud y (b) 12 unidades de longitud. Dibujar la figura apropiada.

3.3 Dos vectores forman un ángulo de 110°. Uno de ellos tiene 20 unidades de longitud y hace un ángulo de 40° con el vector suma de ambos. Encontrar la magnitud del segundo vector y la del vector suma.

3.4 El vector resultante de dos vectores tiene 10 unidades de longitud y hace un ángulo de 35° con uno de los vectores componentes, el cual tiene 12 unidades de longitud. Encontrar la magnitud del otro vector y el ángulo entre ellos.

3.5 Encontrar el ángulo entre dos vectores de 8 y 10 unidades de longitud, cuando su resultante forma un ángulo de 50° con el vector mayor. Calcular también la magnitud del vector resultante.

3.6 El vector resultante de dos vectores tiene 30 unidades de longitud y hace ángulos de 25° y 50° con ellos. Hallar la magnitud de los dos vectores.

3.7 Dos vectores de 10 y 8 unidades de longitud, forman entre sí un ángulo de (a) 60°, (b) 90° y (c) 120°. Encontrar la magnitud de la *diferencia* y el ángulo con respecto al vector mayor.

3.8 Encontrar los componentes rectangulares de un vector de 15 unidades de longitud cuando éste forma un ángulo, con respecto al eje positivo de las X, de (a) 50°, (b) 130°, (c) 230° y (d) 310°.

3.9 Tres vectores situados en un plano, tienen 6, 5 y 4 unidades de longitud. El primero y el segundo forman un ángulo de 50°, mientras que el segundo y el tercero forman un ángulo de 75°. Encontrar la magnitud del vector resultante y su dirección con respecto al vector mayor.

3.10 Dados cuatro vectores coplanares de 8, 12, 10 y 6 unidades de longitud respectivamente; los tres últimos hacen con el primer vector ángulos de 70°, 150° y 200°, respectivamente. Encontrar la magnitud y la dirección del vector resultante.

3.11 Un aeroplano viaja de A siguiendo la dirección del norte hacia B, y luego retorna a A. La distancia entre A y B es L. La velocidad del avión en el aire es v y la velocidad del viento es v'. (a) Demostrar que el tiempo necesario para un viaje de ida y vuelta en aire quieto, $v' = 0$, es $t_a = 2L/v$. (b) Demostrar que el tiempo necesario para un viaje de ida y vuelta cuando el viento corre hacia el este (u oeste) es

$$t_b = t_a/\sqrt{1 - (v'^2/v^2)}.$$

(c) Demostrar que el tiempo necesario para un viaje de ida y vuelta cuando el viento corre hacia el norte (o sur) es $t_c = t_a/1 - (v'^2/v^2)$. (d) ¿Qué posibilidad existe de que se realicen los viajes (b) ó (c) cuando $v' = v$? Para un v' dado, ¿cuál tiempo es mayor t_b ó t_c?

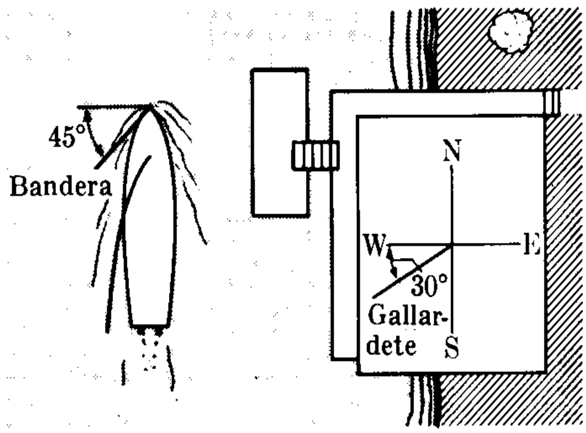


Figura 3-39

3.12 La bandera situada en el mástil de un bote a vela flamea haciendo un ángulo de 45°, como se muestra en la Fig. 3-39, pero la bandera situada en una casa a la orilla se extiende 30° al suroeste. (a) Si la velocidad del bote es de 10 km hr^{-1} calcular la velocidad del viento. (b) Encontrar la velocidad aparente del viento para un observador situado sobre el bote.

3.13 Demostrar que si las magnitudes de la suma y la diferencia de dos vectores son iguales, entonces los vectores son perpendiculares.

3.14 Demostrar que si la suma y la diferencia de dos vectores son perpendiculares, los vectores tienen magnitudes iguales.

3.15 Verificar que las magnitudes de la suma y la diferencia de dos vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, expresadas en coordenadas rectangulares, están dadas por:

$$S = [(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2 + (A_z + B_z)^2]^{1/2}$$

y

$$D = [(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2]^{1/2}$$

respectivamente.

3.16 Dados los vectores

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{u}_x(3) + \boldsymbol{u}_y(4) + \boldsymbol{u}_z(-5)$$

y

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{u}_x(-1) + \boldsymbol{u}_y(1) + \boldsymbol{u}_z(2).$$

Encontrar: (a) la magnitud y dirección de su resultante, (b) la diferencia, de su vector $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$, y (c) el ángulo entre $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$.

3.17 Encontrar el resultado de la suma de los siguientes vectores:

(a) $\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{u}_x(5) + \boldsymbol{u}_y(-2) + \boldsymbol{u}_z,$
(*b*) $\boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{u}_x(-3) + \boldsymbol{u}_y(1) + \boldsymbol{u}_z(-7),$
(c) $\boldsymbol{V}_3 = \boldsymbol{u}_x(4) + \boldsymbol{u}_y(7) + \boldsymbol{u}_z(6).$

Obtener la magnitud de la resultante y los ángulos que hace con los ejes X-, Y-, y Z-.

3.18 Dados los vectores:

(a) $\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{u}_x(-1) + \boldsymbol{u}_y(3) + \boldsymbol{u}_z(4),$
(b) $\boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{u}_x(3) + \boldsymbol{u}_y(-2) + \boldsymbol{u}_z(-8),$
(c) $\boldsymbol{V}_3 = \boldsymbol{u}_x(4) + \boldsymbol{u}_y(4) + \boldsymbol{u}_z(4)$

(a) Determinar por cálculo directo si hay alguna diferencia entre los productos $\boldsymbol{V}_1 \times (\boldsymbol{V}_2 \times \boldsymbol{V}_3)$ y $(\boldsymbol{V}_1 \times \boldsymbol{V}_2) \times \boldsymbol{V}_3$. (b) Encontrar $\boldsymbol{V}_1 \cdot (\boldsymbol{V}_2 \times \boldsymbol{V}_3)$ y $(\boldsymbol{V}_1 \times \boldsymbol{V}_2) \cdot \boldsymbol{V}_3$ y determinar si hay alguna diferencia. Calcular $(\boldsymbol{V}_3 \times \boldsymbol{V}_1) \cdot \boldsymbol{V}_2$ y comparar este resultado con los dos anteriores.

3.19 Expresar $\boldsymbol{V}_1(\boldsymbol{V}_2 \times \boldsymbol{V}_3)$ en forma de determinante. A partir de ella derivar sus propiedades de simetría; esto es,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}_1 \cdot \boldsymbol{V}_2 \times \boldsymbol{V}_3 &= \boldsymbol{V}_3 \cdot \boldsymbol{V}_1 \times \boldsymbol{V}_2 \\ &= \boldsymbol{V}_2 \cdot \boldsymbol{V}_3 \times \boldsymbol{V}_1. \end{aligned}$$

Demostrar que el valor del producto triple escalar es igual al volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores.

3.20 Demostrar que:

$$\boldsymbol{V}_1 \times (\boldsymbol{V}_2 \times \boldsymbol{V}_3) = (\boldsymbol{V}_1 \cdot \boldsymbol{V}_3)\boldsymbol{V}_2 - (\boldsymbol{V}_1 \cdot \boldsymbol{V}_2)\boldsymbol{V}_3.$$

Sugerencia: Colocar el eje X a lo largo de $\boldsymbol{V}_3$ y el eje Y de modo que $\boldsymbol{V}_2$ se encuentre en el plano XY, y verificar la relación por expansión directa.

3.21 Encontrar la distancia entre los puntos P_1 (4, 5, — 7) y P_2 (— 3, 6, 12). Escribir también la ecuación de la línea recta que pasa por los puntos.

3.22 Encontrar la distancia del punto P(4, 5, — 7) a la recta que pasa por el punto Q(— 3, 6, 12) y es paralela al vector $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{u}_x(4) - \boldsymbol{u}_y(1) + \boldsymbol{u}_z(3)$. Encontrar también la distancia del punto P al plano que pasa por Q y es perpendicular a $\boldsymbol{V}$.

3.23 Demostrar que la distancia entre la recta que pasa por P_1 y es paralela a $\boldsymbol{V}_1$ y la recta que pasa por P_2 y es paralela a $\boldsymbol{V}_2$ es

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \boldsymbol{V}_1 \times \boldsymbol{V}_2 / |\boldsymbol{V}_1 \times \boldsymbol{V}_2|.$$

Nota: La distancia entre dos líneas que no se cortan se define como la longitud de la perpendicular más corta a ambas líneas. Desarrollar el resultado anterior, utilizando las coordenadas de P_1 y P_2 y las componentes de $\boldsymbol{V}_1$ y $\boldsymbol{V}_2$. Aplicar al caso cuando P_1(4, 5, — 7), P_2(— 3, 6, 12), $\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{u}_x + \boldsymbol{u}_y + \boldsymbol{u}_z$ y $\boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{u}_x(-2) + \boldsymbol{u}_y + \boldsymbol{u}_z(3)$.

3.24 Dados una recta que pasa por P(4, 5, — 7) paralela a $\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{u}_x(-1) + \boldsymbol{u}_y(2) + \boldsymbol{u}_z(-4)$ y un plano a través de Q(— 3, 6, 12) y perpendicular a $\boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{u}_x + \boldsymbol{u}_y(-1) + \boldsymbol{u}_z(2)$. (a) Escribir las ecuaciones respectivas en coordenadas rectangulares. (b) Encontrar el punto de intersección de la recta y el plano. (c) Hallar el ángulo entre la línea y el plano.

3.25 Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $P(4, 5, -7)$ y es paralela a la intersección de los planos $3x - 2y + 5z = 10$ y $x + y - 2 = 4$. Encontrar también la ecuación de la intersección.

3.26 Demostrar que si ($\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$ y $\boldsymbol{V}_3$ suman cero, entonces $\boldsymbol{V}_1 \times \boldsymbol{V}_3 = \boldsymbol{V}_3 \times \boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{V}_2 \times \boldsymbol{V}_1$. De estas relaciones, obtener: $V_1/\text{sen } V_2V_3 = V_2/\text{sen } V_3V_1 = V_3/\text{sen} \angle V_1V_2$, donde $\angle V_iV_j$ significa el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{V}_i$ y $\boldsymbol{V}_j$.

3.27 Demostrar que si dos vectores tienen la misma magnitud V y hacen un ángulo θ, su suma tiene una magnitud $S = 2V \cos 1/2\theta$ y su diferencia $D = 2V \text{ sen } 1/2\theta$.

3.28 Utilizando las componentes de V_1 y V_2 expresadas en coordenadas esféricas (ec. 3.10) demostrar que el ángulo entre los vectores puede encontrarse a partir de $\cos \theta_{12} = \text{sen } \theta_1 \text{ sen } \theta_2 \cos (\phi_1 - \phi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2$, donde θ_{12} es el ángulo entre los vectores. Este resultado es de gran uso en cálculos astronómicos. Adoptar este resultado para obtener el ángulo entre las verticales en San Francisco (latitud: 37° 45′ N; longitud: 122° 27′ W) y New York (latitud: 40° 40′ N; longitud: 73° 50′ W). Verificar su respuesta con aquélla del problema 2.17.

3.29 Dado el conjunto de 3 vectores nocoplanares $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, los vectores

$$\boldsymbol{a}^1 = \frac{\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3},$$
$$\boldsymbol{a}^2 = \frac{\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1}{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3},$$
$$\boldsymbol{a}^3 = \frac{\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2}{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3}$$

se denominan vectores *recíprocos*. Demostrar que $\boldsymbol{a}^i \cdot \boldsymbol{a}_i = 1$ y que $\boldsymbol{a}^i \cdot \boldsymbol{a}_j = 0$ donde i y j toman los valores 1, 2, 3. Discutir la disposición geométrica de los vectores recíprocos $\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$, $\boldsymbol{a}^3$ en relación con $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$.

3.30 Demostrar que cualquier vector $\boldsymbol{V}$ puede escribirse en cualquiera de estas dos formas

$$\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{a}^1)_1 + (\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{a}^2)\boldsymbol{a}_2 + (\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{a}^3)\boldsymbol{a}_3 = \Sigma_i (\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{a}^i)\boldsymbol{a}_i$$

ó

$$\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}^1 + (\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{a}^2 + (\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{a}^3 = \Sigma_i (\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{a}^i.$$

3.31 Denominando $\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{a}_i = V_i$ y $V^i = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{a}^i$ las *componentes covariantes y contravariantes* de $\boldsymbol{V}$, y

$$g_{ij} = \boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j, \quad g^{ij} = \boldsymbol{a}^i\cdot\boldsymbol{a}^j,$$

demostrar que

$$V^j = \Sigma_i V_i g^{ij}, \quad V_j = \Sigma_i V^i g_{ij}.$$

y

$$V^2 = \Sigma_i V_i V^i = \Sigma_{ij} V_i V_j g^{ij} = \Sigma_{ij} V^i V^j g_{ij}.$$

Estas relaciones son muy importantes en cálculos vectoriales con coordenadas oblicuas, y son especialmente útiles en física del estado sólido en el tratamiento de la estructura cristalina de los sólidos.

3.32 Demostrar que

$$\boldsymbol{a}^1\cdot\boldsymbol{a}^2 \times \boldsymbol{a}^3 = 1/\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3.$$

3.33 Demostrar que $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}s^2 + \boldsymbol{b}s + \boldsymbol{c}$ (donde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son vectores constantes y s una variable escalar) representa una parábola situada en el plano formado por los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ y que pasa por un punto cuyo vector posición es $\boldsymbol{c}$.

3.34 Demostrar que un vector unitario en tres dimensiones puede expresarse como

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_x \cos \alpha + \boldsymbol{u}_y \cos \beta + \boldsymbol{u}_z \cos \theta,$$

donde los ángulos α, β y θ están definidos en la Fig. 3-17.

3.35 Utilizando el hecho de que el vector que representa una superficie cerrada es cero, demostrar que dos superficies que tienen la misma línea cerrada como contorno están representadas por el mismo vector.

3.36 Una superficie abierta está limitada por un triángulo con vértices en (0, 0, 0), (2, 0, 0) y (0, 2, 0). Está constituida por tres superficies triangulares teniendo cada una de ellas un lado coincidente con los lados del triángulo y un vértice común en el punto (a, b, c). Demostrar que el vector que representa la superficie completa es independiente de (a, b, c). ¿Se esperaba este resultado en vista del problema 3.35?

3.37 Un tetraedro es un sólido limitado por cuatro superficies triangulares. Considerar el tetraedro con vértices en los puntos (0, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 2, 0) y (1, 1, 2). Encontrar: (a) el vector que representa cada cara; (b) el vector que representa todo el tetraedro; (c) la magnitud de la superficie del tetraedro. ¿Esperaba Ud. obtener el resultado obtenido en (b)?

3.38 Utilizando métodos vectoriales, encontrar: (a) la longitud de las diagonales de un cubo; (b) sus ángulos con los lados adyacentes; (c) sus ángulos con las caras adyacentes; (d) el ángulo entre las diagonales.

3.39 Las caras de un tetraedro regular son triángulos equiláteros de lado a. Encontrar, utilizando métodos vectoriales, el ángulo que hace cada lado con la cara opuesta y la distancia de un vértice a la cara opuesta.